Università degli Studi di Roma Tor Vergata - Facoltà di Giurisprudenza
Corso di Laurea in Scienze dell'Amministrazione e delle Relazioni Internazionali

Microeconomia
Esercitazioni svolte in classe

Luisa Lorè

A.A. 2017/2018

Microeconomia
Esercitazione 1 - Elementi di Matematica

Luisa Lorè*

08/03/2018

Sistemi di equazioni lineari
Un sistema di equazioni lineari è un insieme di due o più equazioni, è uno strumento che ci permette di verificare in che punto due o più rette si incontrano.
In questo corso ci occuperemo solo dei casi in cui il numero delle equazioni del sistema è uguale al numero delle incognite.
Un sistema di due equazioni in due incognite si presenta nella seguente forma:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$$

Fra i vari metodi di risuluzione noi tratteremo solo due di questi: il metodo di confronto e quello di sostituzione.

Metodo di confronto
Considerate il seguente sistema:

$$\begin{cases} \frac{x+1}{3} - x = y + 1 \\ y - 2 = 2x \end{cases}$$

1. Ricavate la stessa incognita da entrambe le equazioni, cioè esplicitate entrambe le equazioni rispetto alla stessa incognita (in questo caso y)

$$\begin{cases} y = \frac{x+1}{3} - x - 1 \\ y = 2x + 2 \end{cases}$$

2. Eguagliate i secondi membri delle due equazioni risultanti in questo modo

$$\frac{x+1}{3} - x - 1 = 2x + 2$$

3. Risolvete l'equazione ottenuta, che ora è esplicitata in una sola incognita

$$x + 1 - 3x - 3 - 6x - 6 = 0$$

$$x - 3x - 6x = -1 + 3 + 6$$

$$-8x = +8$$

$$x = -1$$

*Università di Roma Tor Vergata, luisa.lore@alumni.uniroma2.eu

4. Sostituite il valore ottenuto (che è il risultato di una delle due incognite per questo sistema) in una qualsiasi delle equazioni di partenza

$$y = 2x + 2$$

$$y = 2(-1) + 2$$

$$y = -2 + 2$$

$$y = 0$$

Metodo di sostituzione
Considerate il seguente sistema:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ x + y = 7 \end{cases}$$

1. Ricavate una delle due incognite, cioè esplicitate l'equazione rispetto a quell'incognita (in questo caso x)

$$\begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ x = 7 - y \end{cases}$$

2. Trascrivete la seconda equazione nella prima, sostituendo il valore ricavato al posto dell'incognita esplicitata precedentemente

$$3(7 - y) + 2y - 5 = 0$$

3. Risolvete l'equazione ottenuta, che ora è esplicitata in una sola incognita

$$21 - 3y + 2y - 5 = 0$$

$$3y - 2y = 21 - 5$$

$$y = 16$$

4. Sostituite il valore ottenuto (che è il risultato di una delle due incognite per questo sistema) in una qualsiasi delle equazioni di partenza

$$x = 7 - y$$

$$x = 7 - 16$$

$$x = -9$$

P.S. Per esercitarvi provate a risolvere i sistemi presentati precedentemente anche utilizzando l'altro metodo.

Potenze e radici n-esime
Elevare all'n-esima potenza un numero vuol dire moltiplicarlo per n volte in questo modo:

$$2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$$

Mentre si definisce radice n-esima di un numero reale a, il numero reale positivo che elevato a n da come risultato a.

$$\sqrt[5]{32} = 2$$

poichè come visto precedentemente

$$2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$$

Ricordate che per convenzione:

$$0^n = 0$$

$$1^n = 1$$

$$n^0 = 1$$

$$x^{-n} = \left(\frac{1}{x}\right)^n$$

$$x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$$

$$x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$$

N.B. Tutti i numeri possono essere elevati a potenza, ma solo i numeri positivi possono essere portati sotto radici di indice pari.

Proprietà delle potenze e dei radicali

$$x^n x^m = x^{n+m}$$

$$\frac{x^n}{x^m} = x^{n-m}$$

$$(x^n)^m = x^{nm}$$

$$x^n y^n = (xy)^n$$

$$\frac{x^n}{y^n} = \left(\frac{x}{y}\right)^n$$

RICORDATE

$$a^n \pm b^n \neq (a \pm b)^n$$

Funzione logaritmica ed esponenziale

Un'equazione esponenziale si presenta nel seguente modo:

$$a^x = b$$

Ad esempio

$$2^x = 8$$

Per risolverla è necessario esprimere le costanti come numeri elevati a potenza in modo tale da ottenere potenze con la stessa base in entrambi i membri dell'equazione e poter occuparsi delle incognite, in questo modo:

$$2^x = 2^3 \Rightarrow x = 3$$

Ripartiamo ora dalla forma generica di equazione esponenziale

$$a^x = b$$

E definiamo il logaritmo nel seguente modo

$$log_a(b) = x$$

(si legge: *logaritmo di b in base a uguale ad x*)

Il logaritmo quindi è una funzione che ha come valore l'indice della potenza (x) a cui dobbiamo elevare la base (a) per ottenere l'argomento (b).

Convenzionalmente la base del logaritmo è 10, ma esiste anche una base "speciale" che è molto frequentemente utilizzata in economia e in statistica, il numero del Nepero, e. Il logaritmo in base e si definisce logaritmo naturale e si scrive così

$$ln(b) = x$$

(si legge: *logaritmo naturale di b uguale ad x*)

La funzione esponenziale è la funzione inversa a quella logaritmica, per comprendere il suo significato ripartiamo dall'equazione esponenziale che abbiamo utilizzato all'inizio

$$a^x = b \Longleftrightarrow log_a(b) = x$$

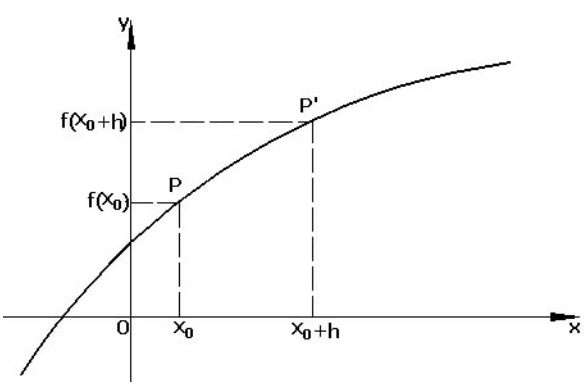
$$ln(b) = log_e(b) = x \Longleftrightarrow e^x = b$$

Durante la prossima esercitazione daremo un'occhiata alla rappresentazione grafica della funzione logaritmica e di quella esponenziale.

Piccola anticipazione sul concetto di derivata

Possiamo considerare la derivata di una curva la sua migliore approssimazione lineare, ma non solo. Le derivate, infatti, sono uno strumento utilissimo in moltissimi campi e ci permettono di misurare cose completamente diverse fra loro. Ad esempio la derivata in un preciso punto di una curva ci dà l'espressione della retta tangente a quel punto, e di conseguenza la sua inclinazione e pendenza. Può anche esprimere la variazione marginale (una variazione molto piccola) tra un punto ed un altro della stessa curva. Vedremo come in questa materia saranno uno strumento utilissimo.

Sfruttiamo la rappresentazione grafica di una curva:



Parleremo di più delle derivate durante la prossima esercitazione partendo proprio da questa rappresentazione grafica.

Microeconomia

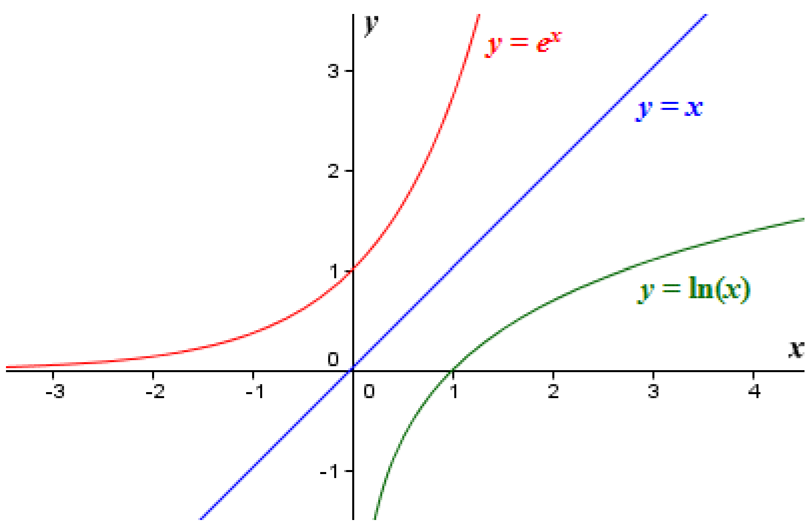
Esercitazione 2 - Elementi di Matematica (parte 2)

Luisa Lorè*

15/03/2018

Funzione logaritmica ed esponenziale: reppresentazione sul piano cartesiano

Per concludere il discorso aperto durante la prima esercitazione riguardo queste funzioni, osserviamone la rappresentazione grafica:



Sia l'esponenziale sia il logaritmo sono due funzioni crescenti, ma il primo cresce *più velocemente* rispetto al secondo. L'intercetta della funzione esponenziale con l'asse delle y è 1, perchè questa funzione vale 1 quando e è elevato a 0 (qualsiasi numero elevato alla 0 risulta 1), mentre non è possibile che y sia zero perchè non esistono valori di x tali per cui un numero diverso da zero elevato a x risulti 0, e quindi questa funzione non avrà un'intercetta sull'asse delle ascisse, quest'ultimo è un asintoto orizzontale per la funzione esponenziale quando essa tende a infinito negativo (tende verso sinistra del nostro piano cartesiano). L'intercetta della funzione logaritmica con l'asse delle x è 1, perchè questa funzione vale 0 quando l'argomento del logaritmo è 1, mentre non c'è nessun valore che x possa assumere tale per cui il valore della funzione sia uguale a 0 e quindi questa funzione non avrà un'intercetta sul piano delle ascisse, quest'ultimo è un asintoto verticale per la funzione logaritmica quando essa tende a infinito negativo (tende verso sinistra del nostro piano cartesiano, ma trovando il *muro* che gli pone davanti l'asintoto è portata verso il basso).

*Università di Roma Tor Vergata, luisa.lore@alumni.uniroma2.eu

Regole di derivazione

Funzione	**Derivata**
$f(x)$	$f'(x)$
$f(x) = k$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$
$f(x) = k \cdot h(x)$	$f'(x) = k \cdot h'(x)$
$f(x) = k \cdot x$	$f'(x) = k$
$f(x) = x^n$	$f'(x) = n \cdot x^{n-1}$
$f(x) = h(g(x))$	$f'(x) = g'(x) \cdot h'(g(x))$
$f(x) = ln(x)$	$f'(x) = \frac{1}{x}$
$f(x) = ln(h(x))$	$f'(x) = h'(x) \cdot \frac{1}{h(x)}$
$f(x) = log(x)$	$f'(x) = \frac{1}{x \cdot ln(a)}$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$
$f(x) = e^{h(x)}$	$f'(x) = h(x) \cdot e^{h(x)}$
$f(x) = a^x$	$f'(x) = a^x ln(a)$

N.B. L'espessione della derivata del logaritmo naturale non coincide con l'espessione della derivata del logaritmo di una qualsiasi base.

Somma algebrica di derivate

$$f(x) = h(x) + g(x) \longrightarrow f'(x) = h'(x) + g'(x)$$

Prodotto di derivate

$$f(x) = h(x) \cdot g(x) \longrightarrow f'(x) = h'(x) \cdot g(x) + h(x) \cdot g'(x)$$

Quoziente di derivate

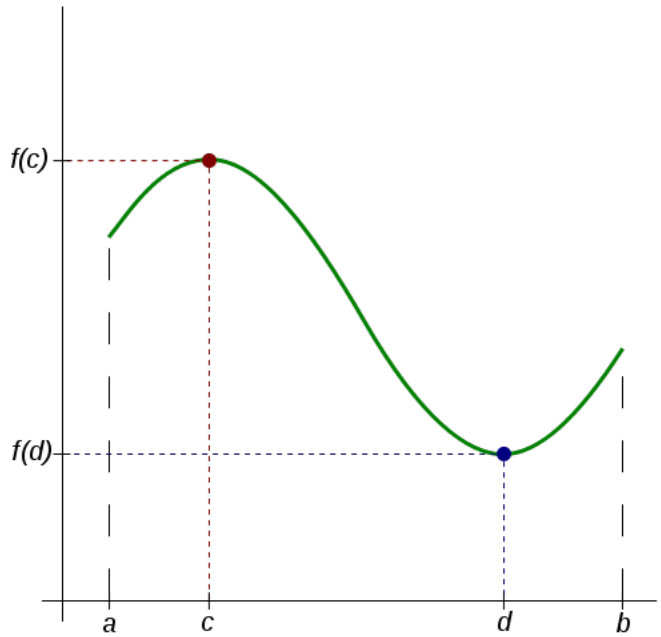
$$f(x) = \frac{h(x)}{g(x)} \longrightarrow f'(x) = \frac{h'(x) \cdot g(x) - h(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$$

Esercizi

- $f(x) = x^6 + 3x^2 + \frac{1}{4}x^3 - 1$
- $f(x) = \frac{x^2-7x+2}{x-3}$
- $f(x) = \frac{ln(x)+2}{5 \cdot ln(x)}$
- $f(x) = x^5 ln(\frac{3}{5}x)$
- $f(x) = e^{\frac{x^4}{x^3+2}}$

Ricordatevi che potete sempre consultare le tabelle delle derivate fondamentali, potete trovare un'ottima versione alla fine di questo documento.

Il teorema di Weierstrass
Sia $[a, b]$ un intervallo chiuso e limitato non vuoto (un intervallo *compatto*) e sia $f(x) : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora $f(x)$ ammette (almeno) un punto di massimo assoluto e un punto di minimo assoluto nell'intervallo $[a, b]$ (assoluti quindi all'interno dell'intervallo, ma non necessariamente *globali*, ovviamente i punti di massimo o minimo assoluti possono essere negli estremi).



Il teorema di Weierstrass, ci permetterà d'ora in poi di assumere l'esistenza dei punti di ottimo (cioè di punti di minimo e/o punti di massimo) durante i problemi di ottimizzazione, facendo delle considerazioni molto poco vincolanti e stringenti sull'intervallo che stiamo prendendo in considerazione.

Tabella delle derivate fondamentali

y (variabile)	y' (derivata)
costante	0
x	1
$\|x\|$	$\frac{x}{\|x\|}$
x^n	$n\,x^{n-1}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\sqrt[n]{x}$	$\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$tg\ x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 - tg^2 x$
$ctg\ x$	$-\frac{1}{\sin^2 x} = -1 - ctg^2 x$
$\log_\alpha x$	$\frac{1}{x}\log_\alpha e$
$\ln x$ *oppure* $\ln\|x\|$ *oppure* $\log x$	$\frac{1}{x}$
a^x	$a^x \log a$
e^x	e^x
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$arctg\ x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$arcctg\ x$	$-\frac{1}{1+x^2}$

Tabella delle regole di derivazione

y (funzione)	y' (derivata)
$k\,f(x)$	$k\,f'(x)$
$f(x)\ \pm\ g(x)$	$f'(x) \pm g'(x)$
$f(x)\cdot g(x)$	$f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x)$
$f(x)\cdot g(x)\cdot h(x)$	$\boldsymbol{f'(x)}\,g(x)\,h(x) + f(x)\,\boldsymbol{g'(x)}\,h(x) + f(x)\,g(x)\,\boldsymbol{h'(x)}$
$\frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{f'(x)\,g(x)\ -\ f(x)\,g'(x)}{g^2(x)}$
$[f(x)]^n$	$n[f(x)]^{n-1} f'(x)$
$[f(x)]^{g(x)}$	$[f(x)]^{g(x)}\cdot\left[g'(x)\cdot\ln[f(x)]\ +\ \frac{g(x)\,f'(x)}{f(x)}\right]$
$f(g(x))$	$f'(g(x))\,g'(x)$
$\sin f(x)$	$\cos f(x)\,f'(x)$
$\cos f(x)$	$-\sin f(x)\,f'(x)$
$tg\ f(x)$	$\frac{f'(x)}{\cos^2 f(x)}$
$ctg\ f(x)$	$-\frac{f'(x)}{\sin^2 f(x)}$
$\log_\alpha f(x)$	$\frac{f'(x)}{f(x)}\log_\alpha e$
$\ln f(x)\ \ oppure\ \ \ln\lvert f(x)\rvert$	$\frac{f'(x)}{f(x)}$
$a^{f(x)}$	$a^{f(x)}\cdot\log a\cdot f'(x)$
$e^{f(x)}$	$e^{f(x)}\cdot f'(x)$
$f^{-1}(x)$ ***	$\frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$
$\arcsin f(x)$	$\frac{f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}}$
$\arccos f(x)$	$-\frac{f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}}$
$arctg\ f(x)$	$\frac{f'(x)}{1+[f(x)]^2}$
$arcctg\ f(x)$	$-\frac{f'(x)}{1+[f(x)]^2}$

Informazioni utili

$y\ =\ e^{\log\sin x}\ =\ \log e^{\sin x}\ =\ \sin x$	$\frac{1}{y}y'\ =\ \log x + 1$

*** Per ricavare la funzione inversa, risolvere l'equazione y = f(x) in x. Il valore della x che si trova è la funzione inversa $f^{-1}(y)$

Microeconomia
Esercitazione 3 - Microeconomia e mercati (1)

Luisa Lorè*

20/03/2018

Come organizzeremo il nostro lavoro

D'ora in poi ci concentreremo e faremo pratica sugli esercizi. Prima di iniziare questa nuova esercitazione, ecco poche utili informazioni su come leggere queste esercitazioni di volta in volta. Per ogni esercizio che faremo in aula vi ritroverete un'intestazione simile:

> ### Esercizio 1 (E1.5, E1.6)
>
> Durante le varie esercitazioni cercherò di non svolgere gli esercizi dell'eserciziario così da permettervi di svolgerli autonomamente durante il vostro studio individuale. Di volta in volta troverete nelle parentesi accanto al numero dell'esercizio il riferimento agli esercizi del Salustri simili a quello proposto in aula. In questo caso, il primo esercizio visto in classe è simile agli esercizi 5 e 6 sul Salustri proposti per il primo capitolo.
>
> **ARGOMENTI**
> Prima ancora del testo dell'esercizio troverete la lista degli argomenti che vi servirà studiare e/o ripassare per svolgere l'esercizio in questione.

Esercizio 1 (E1.5, E1.6)

ARGOMENTI

- curva di domanda diretta e inversa
- elasticità

Data la seguente combinazione di prezzi e quantità del caffè: $A = (2, 6)$ e $B = (4, 2)$

1. Calcolate:
   (a) La funzione di domanda diretta e il relativo grafico
   (b) La funzione di domanda indiretta e il relativo grafico
   (c) L'elasticità della domanda nei due punti

*Università di Roma Tor Vergata, luisa.lore@alumni.uniroma2.eu

2. Indicate e commentate le variazioni del grafico della domanda, in caso si verifichino i seguenti eventi:
   (a) Il reddito del consumatore si dimezza
   (b) Il prezzo del caffè raddoppia
   (c) Il prezzo dello zucchero aumenta
   (d) Il prezzo del tè diminuisce
   (e) Il prezzo del caffè si dimezza

SOLUZIONE

1. Per calcolare la funzione di domanda diretta e indiretta procediamo di pari passo, perché hanno un procedimento speculare e quindi ci risulterà più facile risolvere simultaneamente i punti (a) e (b). Ricordate che per convenzione, la funzione della domanda diretta è in funzione del prezzo ($Q = ap + b$), mentre quella della domanda indiretta è in funzione della quantità ($p = \frac{1}{a}Q+$ c). Calcoliamo prima la pendenza delle due rette, e poi cerchiamo le intercette sul piano delle ascisse e delle ordinate:

$$\frac{\Delta Q}{\Delta p} = \frac{2-6}{4-2} = \frac{-4}{2} = -2 \longrightarrow \frac{\Delta p}{\Delta Q} = -\frac{1}{2}$$

Per $p = 0$

$$\frac{\Delta Q}{\Delta p} = \frac{x-2}{0-4} = -2 \longrightarrow (x-2) = 8 \longrightarrow x = 10$$

Per $Q = 0$

$$\frac{\Delta p}{\Delta Q} = \frac{x-4}{0-2} = -\frac{1}{2} \longrightarrow (x-4) = 1 \longrightarrow x = 5$$

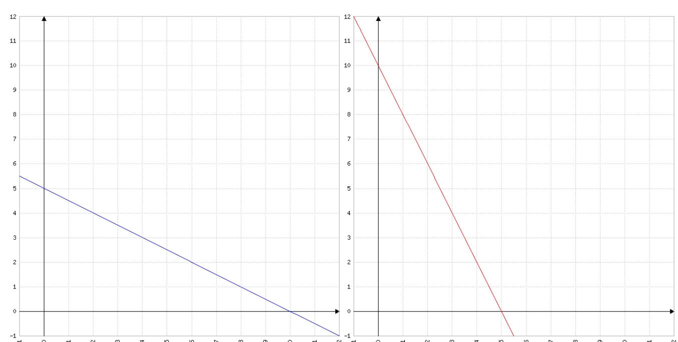
Quindi le due funzioni con i relativi grafici risultano essere

   (a) Domanda diretta

$$Q = -2p + 10$$

   (b) Domanda indiretta

$$p = -\frac{1}{2}Q + 5$$



   (c) Per calcolare l'elasticità della domanda nei due punti osservati è necessario seguire la seguente formula:

$$\epsilon_{Q,p} = \frac{\Delta Q/Q}{\Delta p/p} = \frac{\Delta Q}{\Delta p}\frac{p}{Q}$$

   Quindi nel nostro caso per i punti $A = (2,\, 6)$ e $B = (4,\, 2)$ abbiamo:

$$\epsilon^{A}_{Q,p} = -2\left(\frac{2}{6}\right) = -\frac{2}{3} = 0.\bar{6}$$

$$\epsilon^{B}_{Q,p} = -2\left(\frac{4}{2}\right) = -4$$

2. Prima di svolgere questo punto cerchiamo di fare chiarezza sulla differenza tra un movimento **della curva** e un movimento **lungo la curva**:
   Un movimento della curva di domanda è un vero è proprio spostamento e può essere causato da diversi fattori esterni, mentre un movimento lungo la curva di domanda è uno spostamento della posizione del consumatore sulla curva ed è determinato da una variazione del prezzo.
   Per osservare le variazioni della domanda, in caso si verifichino gli eventi (a)-(e) cerchiamo di comprendere l'intuizione economica dietro a queste possibili variazioni:

   (a) Il reddito del consumatore si dimezza: questo implica che il consumatore avrà a disposizione meno reddito da allocare nel consumo del caffè e quindi la sua intera curva di domanda per il caffè si sposterà verso sinistra.

   (b) Il prezzo del caffè raddoppia: questo implica che il consumatore potrà comprare meno caffè allo stesso prezzo di prima e quindi ci sarà un movimento lungo la sua curva di domanda per il caffè verso sinistra.

   (c) Il prezzo dello zucchero aumenta: supponendo che lo zucchero sia un perfetto complemento del caffè (si definiscono perfetti complementi quei beni che si consumano solo ed esclusivamente in maniera congiunta), l'aumento del prezzo dello zucchero implica indirettamente un aumento del costo di caffè, quindi la curva di domanda per il caffè si sposterà verso sinistra.

   (d) Il prezzo del tè diminuisce: supponendo che il tè sia un perfetto sostituto del caffè (si definiscono perfetti sostituti quei bene che si consumano alternativamente l'uno all'altro), la riduzione del prezzo del tè implica indirettamente un aumento del costo di caffè, quindi la curva di domanda per il caffè si sposterà verso sinistra.

   (e) Il prezzo del caffè si dimezza: questo implica che il consumatore potrà comprare più caffè allo stesso prezzo di prima e quindi ci sarà un movimento lungo la sua curva di domanda per il caffè verso destra.

Esercizio 2 (E1.7)

ARGOMENTI

- Funzione del costo totale
- Funzione del ricavo totale

Data la seguente tabella di valori:

Quantità	Costo	Ricavo
0	0	0
10	200	600
20	600	1000
30	1200	1200
40	2000	1200

Quale quantità dovrebbe produrre l'imprenditore per massimizzare i suoi ricavi?

SOLUZIONE
L'imprenditore dovrebbe produrre sempre nel punto di massimo profitto, il profitto totale in economia è sempre:

$$\pi(Q) = RT(Q) - CT(Q)$$

Nel nostro caso, quindi:

$$\pi(0) = 0 - 0 = 0$$

$$\pi(10) = 600 - 200 = 400$$

$$\pi(20) = 1200 - 1200 = 0$$

$$\pi(30) = 1200 - 2000 = -800$$

$$\pi(40) = 2000 - 1200 = -800$$

Il punto di massimo profitto corrisponde a $Q = 10$, sebbene i punti di massimo ricavo siano $Q = 30$ e $Q = 40$.

Microeconomia
Esercitazione 4 - Microeconomia e mercati (2)
La scelta del consumatore (1)

Luisa Lorè*

22/03/2018

Esercizio 1 (E1.9)

ARGOMENTI

- Costo totale, costo medio e costo marginale

Data la tabella successiva:

Output	**Lavoro(L)**	**Capitale (K)**
0	0	0
1	2	3
2	4	6
3	6	9
4	8	12
5	10	18

Un costo fisso pari a 20, un costo del lavoro unitario pari a 3 ed un costo unitario del capitale di 4. Calcolate per ogni livello di output:

1. il costo totale sostenuto dall'imprenditore
2. il valore assunto dalla funzione del costo medio
3. il valore assunto dalla funzione del costo marginale

SOLUZIONE

1. Per calcolare il costo totale sostenuto dall'imprenditore, possiamo costruire la funzione di costo totale in questo modo:
$$CT(Q) = 20 + (3 \cdot 2) + (4 \cdot 3)(Q) = 20 + 18(Q)$$
La soluzione per ogni livello di output è presente nella prima colonna della prossima tabella.
2. Per il valore assunto della funzione del costo medio, possiamo costruire la seguente funzione:
$$CMe(Q) = \frac{CT(Q)}{Q} = \frac{20 + 18(Q)}{Q}$$
La soluzione per ogni livello di output è presente nella prima colonna della prossima tabella.

*Università di Roma Tor Vergata, luisa.lore@alumni.uniroma2.eu

3. Per il valore assunto della funzione del costo marginale, possiamo costruire la seguente funzione:

$$CMa(Q) = \frac{\partial CT(Q)}{\partial Q} = 18$$

   La soluzione per ogni livello di output è presente nella prima colonna della prossima tabella.

Output	**CT**	**CMe**	**CMa**
0	20	∞	18
1	38	38	18
2	56	28	18
3	74	24,6	18
4	92	23	18
5	110	22	18

Esercizio 2 (E2.5, E2.6)

ARGOMENTI

- Preferenze
- Utilità
- Saggio marginale di sostituzione

Le preferenze di un individuo sono rappresentate dalla seguente funzione d'utilità:

$$U(x_1,\ x_2) = 3x_1^{\frac{1}{2}}x_2^{\frac{1}{2}} = 3 \cdot \sqrt{x_1} \cdot \sqrt{x_2}$$

1. Data la precedente funzione verificate l'utilità dei panieri corrispondenti ai punti $A = (9,\ 4)$ e $B = (4,\ 1)$. Quali considerazioni è possibile trarre riguardo il valore d'uso dei due panieri corrispondenti ai punti A e B?
2. Quali tra le seguenti funzioni possono rappresentare le stesse preferenze espresse dalla nostra funzione d'utilità:
   (a) $U(x_1,\ x_2) = 2 \cdot \sqrt{x_1} \cdot \sqrt{x_2}$
   (b) $U(x_1,\ x_2) = 6x_1^{\frac{2}{3}}x_2^{\frac{5}{2}}$
   (c) $U(x_1,\ x_2) = 18 \cdot \sqrt{x_1} \cdot \sqrt{x_2}$
   (d) $U(x_1,\ x_2) = 3x_1^{\frac{3}{2}}x_2^{\frac{1}{2}}$
3. Verificate se le curve d'indifferenza associate alla funzione d'utilità sono crescenti o decrescenti.
4. Calcolate la pendenza della curva d'indifferenza, quali sono le rilevanti considerazioni che possiamo fare riguardo il modulo e il segno?
5. Calcolate le funzioni di utilità marginale per i due beni.
6. Calcolate il SMS.

SOLUZIONE

1. Per verificare l'utilità dei panieri corrispondenti ai punti $A = (9,\, 4)$ e $B = (4,\, 1)$ dobbiamo inserire i valori dei due punti all'interno della funzione d'utilità, in questo modo:

$$U_A = 3 \cdot \sqrt{9} \cdot \sqrt{4} = 3 \cdot 3 \cdot 2 = 18$$

$$U_B = 3 \cdot \sqrt{4} \cdot \sqrt{1} = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

   Tutto ciò che possiamo affermare è che il valore d'uso del paniere A e superiore a quello del paniere B. Non possiamo però fare considerazioni riguardo all'entità del dislivello fra A e B, ad esempio non possiamo dire che l'utilità del primo paniere è il triplo del secondo, questo perché l'utilità non è misurata in termini ordinali.

2. La risposte esatte possono essere la (a) e la (c) poiché, fra le quattro funzioni proposte, sono le uniche ad essere trasformazioni lineari della funzione d'utilità di partenza.

3. Per derivare le curve d'indifferenza è necessario fissare un livello d'utilità $\bar{U}$ ed esplicitare la funzione in termine di x_2, così:

$$\bar{U} = 3 \cdot \sqrt{x_1} \cdot \sqrt{x_2} \longrightarrow \sqrt{x_2} = \frac{\bar{U}}{3 \cdot \sqrt{x_1}} \longrightarrow x_2 = \frac{\bar{U}^2}{9 \cdot x_1}$$

   Possiamo ora osservare che all'aumentare del bene x_2 corrisponde automaticamente una diminuzione del bene x_1. Si può concludere quindi, sia che i due beni presentati siano effettivamente due beni secondo le preferenze dell'individuo (nessuno dei due beni è un male), sia che, di conseguenza, le curve d'indifferenza hanno una pendenza negativa.

4. Per derivare la pendenza della curva d'indifferenza deriviamo x_2 per $x_1$in questo modo:

$$\frac{\partial x_2}{\partial x_1} = -\frac{\bar{U}^2}{9 \cdot x_1^2} \longrightarrow \left|\frac{\partial x_2}{\partial x_1}\right| = \frac{\bar{U}^2}{9 \cdot x_1^2}$$

   Le cose interessanti che possiamo notare sono: che la pendenza della curva d'indifferenza è negativa, e questo ci conferma il ragionamento portato avanti nel punto 3., e che all'aumentare del bene $x_1$il modulo della pendenza tende a diminuire e che quindi la curva d'indifferenza tende ad essere più piatta.

5. Per calcolare la funzione di utilità marginale di un bene Umg, è necessario derivare la funzione di utilità per il bene di cui stiamo calcolando la Umg:

$$Umg_1 = \frac{\partial U(x_1,\, x_2)}{\partial x_1} = 3 \cdot \frac{1}{2} x_1^{-\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{x_2}{x_1}}$$

$$Umg_2 = \frac{\partial U(x_1,\, x_2)}{\partial x_2} = 3 \cdot \frac{1}{2} x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{-\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{x_1}{x_2}}$$

6. Per calcolare il SMS facciamo il rapporto tra l'utilità marginale dei due beni:

$$SMS = \frac{Umg_1}{Umg_2} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{x_2}{x_1}} \cdot \frac{2}{3}\sqrt{\frac{x_2}{x_1}} = \frac{x_2}{x_1}$$

   Il SMS è la pendenza della curva d'indifferenza del nostro individuo, infatti, se sostituiamo la funzione d'utilità all'interno della pendenza trovata nel punto 4. quello che otteniamo è appunto il SMS:

$$\left|\frac{\partial x_2}{\partial x_1}\right| = \frac{\bar{U}^2}{9 \cdot x_1^2} = \frac{\left(3 \cdot \sqrt{x_1} \cdot \sqrt{x_2}\right)^2}{9 \cdot x_1^2} = \frac{9 \cdot x_1 \cdot x_2}{9 \cdot x_1^2} = \frac{x_2}{x_1} = SMS$$

Microeconomia
Esercitazione 5 - La scelta del consumatore (2)

Luisa Lorè*

05/04/2018

Ripasso sulle derivate

Prima di iniziare quest'esercitazione è importante richiamare qualche breve concetto, sia matematico sia economico. Iniziamo subito richiamando alla mente il calcolo delle derivate di funzioni più "complesse" del solito.

Somma algebrica di derivate $f(x) = h(x) + g(x) \longrightarrow f'(x) = h'(x) + g'(x)$

Prodotto di derivate $f(x) = h(x) \cdot g(x) \longrightarrow f'(x) = h'(x) \cdot g(x) + h(x) \cdot g'(x)$

Quoziente di derivate $f(x) = \frac{h(x)}{g(x)} \longrightarrow f'(x) = \frac{h'(x) \cdot g(x) - h(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$

Esercizio 1 (E2.9, E2.10, E2.11, E2.12)

ARGOMENTI

- Vincolo di bilancio

Dati i beni x_1 e x_2, i rispettivi prezzi $p_1 = 2$ e $p_2 = 4$ ed un reddito $R = 400$:

1. Scrivete il vincolo di bilancio nella forma $x_2 = f(x_1)$, evidenziando le intercette ed il coefficiente angolare della funzione.
2. Individuate l'insieme delle possibilità di consumo.
3. ■ **Esercizio Extra:** Ripetete i punti 1. e 2. supponendo un aumento del 20% del reddito del consumatore.

*Università di Roma Tor Vergata, luisa.lore@alumni.uniroma2.eu

SOLUZIONE
Per comodità il vincolo di bilancio va sempre espresso nella forma $x_2 = f(x_1)$ poichè sarà più utile questa forma per poterlo in seguito rappresentare su di un piano cartesiano. Ma è molto importante conoscere e partire con la nostra analisi dalla seguente formula:

$$R = p_1 x_1 + p_2 x$$

E poi eventualmente riscriverla nel suguente modo:

$$R = p_1 x_1 + p_2 x \longrightarrow p_2 x_2 = R - p_1 x_1 \longrightarrow x_2 = \frac{R}{p_2} - \frac{p_1}{p_2} x_1$$

Questo perchè la forma espressa dalla prima formula ci aiuta a comprendere meglio il concetto del vincolo di bilancio ed il suo funzionamento. Prima di inserire i numeri all'interno del vincolo cerchiamo di capire dalla forma generica quali siano le intercette ed il coefficiente angolare.

- Partiamo dal coefficiente angolare, la costante che nella forma $x_2 = f(x_1)$ è moltiplicata per x_1, quindi $-\frac{p_1}{p_2}$. La pendenza del vincolo di bilancio è data dal rapporto tra i due prezzi.
- Passiamo ora alle intercette, sappiamo dalla forma $x_2 = f(x_1)$ che l'intercetta sull'asse x_2, cioè il valore che la retta assume quando $x_1 = 0$ è $x_2 = \frac{R}{p_2}$. Quale intuizione economica ci suggerisce questo? Le intercette del vincolo di bilancio rappresentano quante unità di un bene il consumatore avrebbe la possibilità di acquistare nel caso decidesse di comprare solo quel bene, quindi se allocasse il suo intero reddito in un bene. Appare quindi evidente che le intercette sugli assi, in assenza di ulteriori condizioni, saranno sempre individuate nel seguente modo:$x_1 = \frac{R}{p_1}$ e $x_2 = \frac{R}{p_2}$.

1. Per concludere:
$$R = p_1 x_1 + p_2 x \longrightarrow p_2 x_2 = R - p_1 x_1 \longrightarrow x_2 = \frac{R}{p_2} - \frac{p_1}{p_2} x_1$$
$$400 = 2x_1 + 4x_2 \longrightarrow 4x_2 = 400 - 2x_1 \longrightarrow x_2 = 100 - \frac{1}{2} x_1$$
$$-\frac{p_1}{p_2} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$
$$x_1 = \frac{R}{p_1} = \frac{400}{2} = 200$$
$$x_2 = \frac{R}{p_2} = \frac{400}{4} = 100$$

2. Dato il vincolo di bilancio calcolato nel punto 1., possiamo identificare l'insieme delle possibilità di consumo dell'individuo. Ripartiamo da questa formula:
$$R = p_1 x_1 + p_2 x$$
Questa espressione, come abbiamo già lungamente detto, rappresenta il vincolo di bilancio, in un certo senso rappresenta al massimo quanto il consumatore può comprare, ma dobbiamo anche valutare tutti i panieri che il consumatore può acquistare senza spendere il suo intero reddito, quindi le combinazioni prezzo-quantità dei beni x_1 e x_2 minori di R, nel seguente modo:
$$R > p_1 x_1 + p_2 x \longrightarrow p_2 x_2 < R - p_1 x_1 \longrightarrow x_2 < \frac{R}{p_2} - \frac{p_1}{p_2} x_1$$
$$400 > 2x_1 + 4x_2 \longrightarrow 4x_2 < 400 - 2x_1 \longrightarrow x_2 < 100 - \frac{1}{2} x_1$$

3. Calcoliamo un aumento del 20% del reddito del consumatore nel seguente modo:

$$R + \left(R \cdot \frac{20}{100}\right) = 400 + \left(400 \cdot \frac{20}{100}\right) = 400 + 80 = 480$$

Vincolo di bilancio:

$$480 = 2x_1 + 4x_2 \longrightarrow 4x_2 = 480 - 2x_1 \longrightarrow x_2 = 120 - \frac{1}{2}x_1$$

Coefficiente angolare:

$$-\frac{p_1}{p_2} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$

Inercette:

$$x_1 = \frac{R}{p_1} = \frac{480}{2} = 240$$

$$x_2 = \frac{R}{p_2} = \frac{480}{4} = 120$$

Insieme delle possibilità di consumo

$$480 > 2x_1 + 4x_2 \longrightarrow 4x_2 < 480 - 2x_1 \longrightarrow x_2 < 120 - \frac{1}{2}x_1$$

Esercizio 2 (E2.13) ***

ARGOMENTI
N.B. Questo esercizio riassume gran parte (se non davvero tutti) dei concetti e degli aromenti trattati riguardo come, i.e. con quali strumenti ostacoli e mezzi, il consumatore compie le sue scelte. D'ora in poi questo tipo di esercizi verranno sempre contraddistinti con tre asterischi.

- Punto di ottimo del consumatore
- Tangenza tra curva d'indifferenza e vincolo di bilancio

Data la seguente curva d'utilità

$$U(x_1,\, x_2) = \sqrt{x_1 x_2}$$

Indicate la scelta di ottimo per un consumatore avente un reddito $R = 200$ in un mercato in cui i prezzi dei beni sono $p_1 = p_2 = 10$.

SOLUZIONE
Il punto di ottimo del consumatore è il punto in cui l'individuo preso in analisi gode dell'utilità maggiore che può raggiungere dato il suo vincolo di bilancio, in parole povere è il più felice possibile rispetto a quelle che sono le sue risorse economiche. Dalla teoria sappiamo di dover risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} SMS = \frac{p_1}{p_2} \\ R = p_1 x_1 + p_2 x_2 \end{cases}$$

Ma perchè? Come abbiamo detto già tante volte, un sistema ci aiuta ad individuare i punti in cui più curve passano e quindi punti di intersezione o di tangenza tra le due curve. In questo caso noi stiamo ponendo uguali nella prima equazione le due pendenze delle curve di cui ci interessa trovare il punto di tangenza, la funzione della curva d'indifferenza (SMS) e il vincolo di bilancio $\left(\frac{p_1}{p_2}\right)$. La prima equazione ci esprime, quindi, come ricavare da un punto di vista matematico la situazione ottimale per il consumatore. La seconda equazione pone una restrizione al nostro problema, cioè individua al massimo quanto il consumatore può acquistare per massimizzare la sua funzione di utilità, ed è semplicemente il vincolo di bilancio. Ora, la risoluzione di questo sistema non è estremamente complessa, ma è importante sottilineare perché stiamo cercando esattamente il punto di tangenza, e non semplicemente un punto di intersezione tra le due curve. La curva di utilità tangente al vincolo di bilancio è quella che corrisponde al livello più alto possibile tra quelle che sono ancora parte del vincolo di bilancio, è la più estrema, quindi in un'ottica di massimizzazione è la migliore.
Passiamo ora alla risoluzione numerica:

$$\begin{cases} \frac{x_1}{x_2} = \frac{10}{10} \\ 200 = 10x_1 + 10x_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{x_1}{x_2} = 1 \\ 200 = 10(x_1 + x_2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = x_2 \\ 200 = 20x_1 \end{cases}$$

$$x^*{}_1 = x^*{}_2 = 10$$

Dalla prossima volta vedremo come questo, che è un problema di ottimizzazione vincolato, può essere risolto in altri modi.

Microeconomia
Esercitazione 6 - Elementi di Matematica (3)
Costruire una curva di domanda (1)

Luisa Lorè*

12/04/2018

Derivate e studio di funzione

Prima di iniziare quest'esercitazione, richiamiamo il concetto geometrico di derivata, cerchiamo di comprendere il significato geometrico della prima e della seconda derivata e la differenza fra quest'ultime.

Significato geometrico della derivata prima: Data una funzione $y = f(x)$ ed un punto x_0 del suo dominio, la derivata prima $f'(x_0)$ è il coefficiente angolare (la pendenza) della retta tangente al grafico della funzione nel punto $(x_0,\, f(x_0))$.

Come possiamo sfruttare le derivate nello studio di funzione? Studiando il segno delle derivate prima e seconda di una funzione, possiamo stabilire in quali intervalli del dominio la funzione cresce o descresce (segno della derivata prima) e trovare i suoi minimi e massimi, sia relativi sia assoluti (segno della derivata seconda).

Seguiamo queste semplici regole:

$$\begin{cases} f'(x) > 0 & la\ funzione\ è\ crescente \\ f'(x_0) = 0 & la\ funzione\ ha\ un\ punto\ stazionario\ in\ x_0 \\ f'(x) < 0 & la\ funzione\ è\ decrescente \end{cases}$$

$$\begin{cases} f''(x_0) > 0 & la\ funzione\ ha\ un\ minimo\ in\ x_0 \\ f''(x_0) < 0 & la\ funzione\ ha\ un\ massimo\ in\ x_0 \end{cases}$$

Se la derivata prima esprime il coefficiente angolare della retta tangente ad un punto, sapremo che quando questa è positiva allora, il coefficiente della retta tangente alla nostra curva è positivo e quindi la curva è crescente, al contrario se la derivata prima è negativa, allora anche il coefficiente angolare della retta tangente alla curva in questione è negativo e la retta è di conseguenza decrescente. Nel caso in cui la derivata prima fosse uguale a zero in un determinato punto, allora quel punto è un punto stazionario, spesso un punto di "transizione" tra un intervallo in cui la retta è crescente ed uno in cui la retta è decrescente (minimo/massimo). Per capire se il punto stazionario in esame è, appunto, un punto di massimo, di minimo o di flesso, dobbiamo studiare il segno della derivata seconda in quel punto. La derivata seconda ci indica la curvatura del grafico della funzione che stiamo prendendo in considerazione: se questa è positiva la funzione è convessa e quindi quello che stiamo osservando è un minimo, se, al contrario, questa è negativa la funzione è concava e quindi quello che stiamo osservando è un massimo. In questo corso non indagheremo la natura dei punti per cui la derivata seconda è uguale a zero.

*Università di Roma Tor Vergata, luisa.lore@alumni.uniroma2.eu

Esercizio 1 (Esempio di studio di funzione)

ARGOMENTI

- Derivata prima e seconda ed il loro utilizzo nello studio di funzione

Data la seguente funzione: $f(x) = x^2 - 8x + 3$ calcolate:

1. Le condizioni di esistenza e il suo dominio
2. La sua derivata prima e gli intervalli in cui essa cresce e decresce
3. I suoi punti stazionari e la loro natura grazie alla derivata seconda

SOLUZIONE

1. Per calcolare il dominio di una funzione dobbiamo considerare quali possono essere i punti in cui essa non è definita, nel nostro caso la funzione è definita su tutto il piano cartesiano. In generale ricordate i seguenti casi:
   (a) Il dominio delle funzioni fratte è ristretto dalle situazioni in cui il denominatore è uguale a zero.
   (b) Il dominio delle radici di ordine pari è ristretto dalle situazioni in cui l'argomento della radice è minore di zero.
   (c) Il dominio delle funzioni logaritmiche è ristretto dalle situazioni in cui l'argomento del logaritmo è minore di zero.
2. La derivata prima della funzione è:
   $$f'(x) = 2x - 8$$
   Come abbiamo già detto nella prima parte studiando il segno della derivata riusciamo a comprendere gli intervalli in cui essa è crescente e decrescente, in questo modo:
   $$f'(x) > 0 \longrightarrow 2x - 8 > 0 \longrightarrow x > 4$$
   $$f'(x) < 0 \longrightarrow 2x - 8 < 0 \longrightarrow x < 4$$
3. Passando ora ai punti stazionari, sappiamo che dobbiamo calcolarli tramite la derivata prima uguagliandola a zero, in questo modo:
   $$f'(x) = 0 \longrightarrow 2x - 8 = 0 \longrightarrow x = 4$$
   Sappiamo quindi che 4 è un punto stazionario, per indagarne la sua natura dobbiamo studiare il segno della derivata seconda in questo punto specifico. Per calcolare la derivata seconda della nostra funzione dobbiamo semplicemente derivare (secondo tutte le regole che già conosciamo) la derivata prima, in questo modo:
   $$f''(x) = 2$$
   In questo caso non dobbiamo nemmeno studiare il segno nel punto specifico che abbiamo trovato, perché questa è una funzione che è definita concava/convessa su tutto il piano quindi il punto stazionario che abbiamo trovato è un minimo/massimo assoluto. Ci sono infatti funzioni che mantengono la stessa curvatura per l'intero piano cartesiano e che possiamo definire sempre concave o sempre convesse nel caso in cui la derivata seconda sia sempre positiva o sempre negativa.

Esercizio 2 (E3.1)

ARGOMENTI

- Punto di ottimo del consumatore
- Tangenza tra curva d'indifferenza e vincolo di bilancio

Data la seguente curva d'utilità

$$U(x_1, x_2) = 3x_1x_2$$

1. Indicate la scelta di ottimo per un consumatore avente un reddito $R = 120$ in un mercato in cui i prezzi dei beni sono $p_1 = 2$ e $p_2 = 3$.
2. Determinate come cambia la scelta di ottimo se il reddito del consumatore raddoppia ($R' = 240$).

SOLUZIONE

1. Come abbiamo abbondantemente visto la scorsa esercitazione, per trovare il punto di ottimo del consumatore dobbiamo risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} SMS = \frac{p_1}{p_2} \\ R = p_1x_1 + p_2x_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{x_2}{x_1} = \frac{2}{3} \\ 120 = 2x_1 + 3x_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = \frac{2}{3}x_1 \\ 120 = 2x_1 + 3\frac{2}{3}x_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = \frac{2}{3}30 \\ 120 = 4x_1 \end{cases}$$

$$x^*{}_1 = 30$$

$$x^*{}_2 = 20$$

2. Ripetiamo ciò che abbiamo fatto nel punto 1. con R' al posto di R.

$$\begin{cases} SMS = \frac{p_1}{p_2} \\ R = p_1x_1 + p_2x_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{x_2}{x_1} = \frac{2}{3} \\ 240 = 2x_1 + 3x_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = \frac{2}{3}x_1 \\ 240 = 2x_1 + 3\frac{2}{3}x_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = \frac{2}{3}60 \\ 240 = 4x_1 \end{cases}$$

$$x^*{}_1 = 60$$

$$x^*{}_2 = 40$$

Microeconomia
Esercitazione 7 - Costruire una curva di domanda (2)

Luisa Lorè*

16/04/2018

Esercizio 1 (=E3.7)

ARGOMENTI

- Concetto di domanda ottima per un bene
- Elasticità della domanda
- Definizione della natura di un bene in base all'elasticità della sua domanda

Data la seguente funzione d'Utilità

$$U(x_1,\, x_2) = x_1^{\alpha}\, x_2^{\beta}$$

Calcolate:

1. Le domande ottime per i due beni
2. Le elasticità delle domande ottime al prezzo, sia dirette che incrociate
3. Le elasticità delle domande ottime al reddito ed indicare se i due beni sono normali (superiori) o Giffen (inferiori)

SOLUZIONE

1. Calcoliamo le domande ottime per i due beni con il solito sistema d'equazioni:

$$\begin{cases} SMS = \frac{p_1}{p_2} \\ R = p_1 x_1 + p_2 x_2 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\partial U(x_1,\, x_2)/\partial x_1}{\partial U(x_1,\, x_2)/\partial x_2} = \frac{p_1}{p_2} \\ \rightarrow \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\alpha\, x_1^{\alpha-1}\, x_2^{\beta}}{\beta\, x_1^{\alpha}\, x_2^{\beta-1}} = \frac{p_1}{p_2} \\ \rightarrow \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\alpha}{\beta} x_1^{\alpha-1-\alpha} x_2^{\beta-\beta+1} = \frac{p_1}{p_2} \\ \rightarrow \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\alpha}{\beta}\, \frac{x_2}{x_1} = \frac{p_1}{p_2} \\ \rightarrow \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = x_1 \frac{p_1}{p_2} \frac{\beta}{\alpha} \\ R = p_1 x_1 + p_2 \left(x_1 \frac{p_1}{p_2} \frac{\beta}{\alpha} \right) \end{cases} \quad \begin{cases} \rightarrow \\ R = p_1 x_1 + p_1 x_1 \frac{\beta}{\alpha} \end{cases} \quad \begin{cases} \rightarrow \\ R = \left(1 + \frac{\beta}{\alpha} \right) p_1 x_1 \end{cases}$$

$$x_1^* = \frac{R}{p_1} \left(\frac{\alpha}{\alpha + \beta} \right)$$

*Università di Roma Tor Vergata, luisa.lore@alumni.uniroma2.eu

Inseriamo x_1^* nel SMS ed otteniamo

$$x_2^* = \frac{R}{p_1}\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)\frac{p_1}{p_2}\frac{\beta}{\alpha} = \frac{R}{p_2}\left(\frac{\beta}{\alpha+\beta}\right)$$

2. Calcoliamo le elasticità dirette delle domande ottime al prezzo:

$$\epsilon(x_1, p_1) = \frac{\partial x_1}{\partial p_1}\frac{p_1}{x_1} = -\frac{R}{p_1^2}\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)\frac{p_1}{x_1} = -\frac{R}{p_1}\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)\frac{1}{\frac{R}{p_1}\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)} = -1$$

$$\epsilon(x_2,\, p_2) = \frac{\partial x_2}{\partial p_2}\frac{p_2}{x_2} = -\frac{R}{p_2^2}\left(\frac{\beta}{\alpha+\beta}\right)\frac{p_2}{x_2} = -\frac{R}{p_2}\left(\frac{\beta}{\alpha+\beta}\right)\frac{1}{\frac{R}{p_2}\left(\frac{\beta}{\alpha+\beta}\right)} = -1$$

Ora invece, calcoliamo le elasticità incrociate domande ottime al prezzo:

$$\epsilon(x_1,\, p_2) = \frac{\partial x_1}{\partial p_2}\frac{p_2}{x_1} = 0$$

$$\epsilon(x_2,\, p_1) = \frac{\partial x_2}{\partial p_1}\frac{p_1}{x_2} = 0$$

3. Calcoliamo le elasticità delle domande ottime al reddito:

$$\epsilon(x_1,\, R) = \frac{\partial x_1}{\partial R}\frac{R}{x_1} = \frac{1}{p_1}\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)\frac{R}{x_1} = \frac{R}{p_1}\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)\frac{1}{\frac{R}{p_1}\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)} = 1$$

$$\epsilon(x_2,\, R) = \frac{\partial x_2}{\partial R}\frac{R}{x_2} = \frac{1}{p_2}\left(\frac{\beta}{\alpha+\beta}\right)\frac{R}{x_2} = \frac{R}{p_2}\left(\frac{\beta}{\alpha+\beta}\right)\frac{1}{\frac{R}{p_2}\left(\frac{\beta}{\alpha+\beta}\right)} = 1$$

Microeconomia
Esercitazione 8 - Costruire una curva di domanda (3)

Luisa Lorè[*]

19/04/2018

Esercizio 1 (E3.1, E3.4, E3.7, E3.10)

ARGOMENTI

- Punto di ottimo del consumatore
- Costruzione della curva di domanda

Considerate la seguente funzione di utilità

$$U(x_1, x_2) = x_1^{\frac{1}{3}} x_2^{\frac{2}{3}}$$

a cui corrisponde $SMS = \frac{1}{2}\frac{x_2}{x_1}$. Un reddito $R = 60$ e i prezzi $p_1 = 6$ e $p_2 = 1$.

1. Determinate la scelta ottima del consumatore e il livello di utilità ad essa corrispondente.
2. Determinate la scelta ottima, se il prezzo del bene x_1 si riduce a 3.
3. Determinate la scelta ottima, se il prezzo del bene x_2 aumenta a 3.
4. Seguendo i panieri ottimali trovati disegnate il grafico della curva di domanda del consumatore.

SOLUZIONE

1. Per calcolare la scelta ottima del consumatore risolviamo il solito sistema:

$$\begin{cases} SMS = \frac{p_1}{p_2} \\ R = p_1x_1 + p_2x_2 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{1}{2}\frac{x_2}{x_1} = 6 \\ 60 = 6x_1 + x_2 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 12x_1 \\ 60 = 6x_1 + 12x_1 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1^* = \frac{10}{3} \\ x_2^* = 40 \end{cases}$$

2. Ripetiamo il punto 1. modificando p_1

$$\begin{cases} SMS = \frac{p_1}{p_2} \\ R = p_1x_1 + p_2x_2 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{1}{2}\frac{x_2}{x_1} = 3 \\ 60 = 3x_1 + x_2 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 6x_1 \\ 60 = 3x_1 + 6x_1 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1^* = \frac{20}{3} \\ x_2^* = 40 \end{cases}$$

3. Ripetiamo il punto 2. modificando p_2

$$\begin{cases} SMS = \frac{p_1}{p_2} \\ R = p_1x_1 + p_2x_2 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{1}{2}\frac{x_2}{x_1} = 1 \\ 60 = 3x_1 + 3x_2 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 2x_1 \\ 60 = 3x_1 + 6x_1 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1^* = \frac{20}{3} \\ x_2^* = \frac{40}{3} \end{cases}$$

[*]Università di Roma Tor Vergata, luisa.lore@alumni.uniroma2.eu

Esercizio 2 (E3.1, E3.4, E3.7, E3.10)

ARGOMENTI

- Curva di Engel

Considerate un reddito $R = 600$, due beni x_1 e x_2, i rispettivi beni $p_1 = 10$ e $p_2 = 5$ e la seguente funzione d'utilità

$$U(x_1, x_2) = x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{2}}$$

Calcolate:

1. Le funzioni di domanda $x_1(p_1, p_2, R)$ e $x_2(p_1, p_2, R)$, indicando se si tratta di beni normali o di Giffen.
2. Il paniere di consumo ottimo.
3. La curva di Engel per entrambi i beni, rrappresentandola graficamente e indicando se si tratta di beni superiori o inferiori.

SOLUZIONE

1. Le funzioni di domanda si ottengono tramite il sistema che abbiamo impostato per calcolare la scelta ottima del consumo (che però risolveremo nel punto 2.), per ora calcoliamo le domande in funzione di p_1, p_2 e R:

$$\begin{cases} SMS = \frac{p_1}{p_2} \\ R = p_1 x_1 + p_2 x_2 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{x_1}{x_2} = \frac{p_1}{p_2} \\ R = p_1 x_1 + p_2 x_2 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = \frac{p_1}{p_2} x_1 \\ R = p_1 x_1 + p_2 \frac{p_1}{p_2} x_1 \to R = 2p_1 x_1 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = \frac{R}{2p_1} \\ x_2 = \frac{R}{2p_2} \end{cases}$$

   Entrambi i beni sono normali perchè in entrambi i casi la domanda aumenta al diminuire dei prezzi e viceversa (domanda e prezzo sono inversamente proporzionali).

2. Inserite ora il reddito e i prezzi nelle funzioni di domanda ricavate nel punto 1.

$$\begin{cases} x_1^* = \frac{600}{2 \cdot 10} = \frac{600}{20} = 30 \\ x_2^* = \frac{600}{2 \cdot 5} = \frac{600}{10} = 60 \end{cases}$$

3. La curva di Engel si ottiene ricavando R dalla curva di domanda del bene. In particolare, la curva di Engel per il bene x_1è:

$$R = 2p_1 x_1^* = 20x_2^*$$

   la curva di Engel per il bene 2 è invece:

$$R = 2p_1 x_1^* = 10x_2^*$$

   Entrambi i beni sono superiori poichè la loro domanda aumenta all'aumentare del reddito.

Esercizio 3 (E3.1, E3.4, E3.7, E3.10)

ARGOMENTI

- Punto di ottimo del consumatore
- Elasticità rispetto al reddito e rispetto ai prezzi (semplice ed incrociata)

Considerate la seguente funzione di utilità

$$U(x_1,\, x_2) = x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{4}}$$

a cui corrisponde $SMS = \frac{2x_2}{x_1}$. Un reddito $R = 12$ e i prezzi $p_1 = 4$ e $p_2 = 1$.
Calcolate:

1. Le funzioni di domanda $x_1(p_1,\, p_2,\, R)$ e $x_2(p_1,\, p_2,\, R)$.
2. Il paniere di consumo ottimo.
3. Le eslasticità di entrambi i beni rispetto ai prezzi (sia le elasticità semplici, sia quelle incrociate) e rispetto al reddito.

SOLUZIONE

1. Calcoliamo le domande dei due beni tramite il sistema:

$$\begin{cases} SMS = \frac{p_1}{p_2} \\ R = p_1 x_1 + p_2 x_2 \end{cases} \quad \begin{cases} 2\frac{x_2}{x_1} = \frac{p_1}{p_2} \\ R = p_1 x_1 + p_2 x_2 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = \frac{x_1}{2}\frac{p_1}{p_2} \\ R = p_1 x_1 + p_2 \frac{x_1}{2}\frac{p_1}{p_2} \end{cases} \quad \begin{cases} \rightarrow \\ R = \frac{3}{2}\,(p_1 x_1) \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = \frac{2}{3}\frac{R}{p_1}\frac{1}{2}\frac{p_1}{p_2} = \frac{1R}{3p_2} \\ x_1 = \frac{2}{3}\frac{R}{p_1} \end{cases}$$

2. Inseriamo i dati riguardo il reddito del consumatore e i prezzi dei due beni:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{2}{3}\frac{R}{p_1} \\ x_2 = \frac{1R}{3p_2} \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = \frac{2}{3}\frac{12}{4} = 2 \\ x_2 = \frac{1}{3}\frac{12}{1} = 4 \end{cases}$$

3. Calcoliamo le elasticità dirette delle domande ottime al prezzo:

$$\epsilon(x_1, p_1) = \frac{\partial x_1}{\partial p_1}\frac{p_1}{x_1} = -\frac{2}{3}\frac{R}{p_1^2}\frac{p_1}{x_1} = -\frac{2}{3}\frac{R}{p_1}\frac{1}{\frac{2}{3}\frac{R}{p_1}} = -1$$

$$\epsilon(x_2,\, p_2) = \frac{\partial x_2}{\partial p_2}\frac{p_2}{x_2} = -\frac{1}{3}\frac{R}{p_2^2}\frac{p_2}{x_2} = -\frac{2}{3}\frac{R}{p_2}\frac{1}{\frac{1}{3}\frac{R}{p_2}} = -1$$

Ora invece, calcoliamo le elasticità incrociate delle domande ottime al prezzo:

$$\epsilon(x_1,\, p_2) = \frac{\partial x_1}{\partial p_2}\frac{p_2}{x_1} = 0$$

$$\epsilon(x_2,\, p_1) = \frac{\partial x_2}{\partial p_1}\frac{p_1}{x_2} = 0$$

Calcoliamo le elasticità delle domande ottime al reddito:

$$\epsilon(x_1,\, R) = \frac{\partial x_1}{\partial R}\frac{R}{x_1} = \frac{2}{3}\frac{1}{p_1}\frac{R}{x_1} = \frac{2}{3}\frac{R}{p_1}\frac{1}{\frac{2}{3}\frac{R}{p_1}} = 1$$

$$\epsilon(x_2,\, R) = \frac{\partial x_2}{\partial R}\frac{R}{x_2} = \frac{1}{3}\frac{1}{p_1}\frac{R}{x_2} = \frac{1}{3}\frac{R}{p_1}\frac{1}{\frac{1}{3}\frac{R}{p_1}} = 1$$

Microeconomia
Esercizi Extra (1)

Luisa Lorè*

Esercizi sui primi 3 capitoli del libro

Esercizio 1

Data la seguente curva d'utilità

$$U(x_1,\, x_2) = 3x_1^{\frac{1}{3}} x_2^{\frac{2}{3}}$$

Supponendo un reddito $R = 300$, costruite la curva di domanda per il bene x_1e quella per il bene x_2, che potete ottenere tramite il sistema che conoscete bene e tracciate i rispettivi grafici (due curve distinte, due grafici distinti, sulle ascisse la quantità di x_1 o x_2 e sulle ordinate i prezzi p_1 e p_2).

Esercizio 2

Considerate un consumatore con un reddito $R = 60$, due beni x_1e x_2, i rispettivi prezzi $p_1 = 6$ e $p_2 = 1$ e la seguente funzione di utilità:

$$U(x_1,\, x_2) = x_1^{\frac{1}{4}} x_2^{\frac{3}{4}}$$

Determinate le elasticità (rispetto al reddito, al prezzo e al prezzo incrociato) dei beni, e commentate i risultati. Quali considerazioni è possibile trarre rispetto alla natura dei beni x_1 e x_2?

Esercizio 3

Data la seguente curva d'utilità

$$U(x_1,\, x_2) = x_1^{0,4} x_2^{0,6}$$

Calcolate il paniere ottimo per un consumatore avente un reddito $R = 800$ partendo dai prezzi $p_1 = p_2 = 10$.

Esercizio 4

Considerate un reddito $R = 300$, due beni x_1 e x_2, i rispettivi beni $p_1 = 10$ e $p_2 = 5$ e la seguente funzione d'utilità

$$U(x_1,\, x_2) = x_1^{\frac{1}{4}} x_2^{\frac{1}{4}}$$

Calcolate la curva di Engel per entrambi i beni e rappresentatela graficamente.

*Università di Roma Tor Vergata, luisa.lore@alumni.uniroma2.eu

Esercizio 5 ***

Supponete un consumatore avente la seguente curva d'utilità:

$$U(x_1,\, x_2) = x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{2}}$$

il consumatore vive per 4 periodi ($t = 1,\, 2,\, 3,\, 4$), ad ogni periodo il consumatore ha un reddito $R = 200$ ad ogni periodo il prezzo p_1, corrispondente al bene x_1, aumenta di cinque unità, mentre il prezzo p_2, corrispondente al bene x_2, raddoppia. Al tempo 1 ($t = 1$) i prezzi dei beni sono i seguenti:

$$p_1 = 10$$

$$p_2 = 5$$

1. Calcolate i panieri di consumo ottimo per ogni tempo t.
2. Costruite la curva di domanda per il bene x_1e quella per il bene x_2, che potete ottenere tramite il sistema che conoscete bene e tracciate i rispettivi grafici (due curve distinte, due grafici distinti, sulle ascisse la quantità di x_1 o x_2 e sulle ordinate i prezzi p_1 e p_2).

Soluzioni esercizi sui primi 3 capitoli del libro

Esercizio 1

Calcoliamo le domande dei due beni tramite il sistema:

$$\begin{cases} SMS = \frac{p_1}{p_2} \\ R = p_1x_1 + p_2x_2 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{1}{2}\frac{x_2}{x_1} = \frac{p_1}{p_2} \\ R = p_1x_1 + p_2x_2 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 2x_1\frac{p_1}{p_2} \\ R = p_1x_1 + p_2 2x_1\frac{p_1}{p_2} \end{cases} \quad \begin{cases} \rightarrow \\ R = 3p_1x_1 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 2\frac{R}{3p_1}\frac{p_1}{p_2} = \frac{2R}{3p_2} \\ x_1 = \frac{R}{3p_1} \end{cases}$$

Sostituiamo il reddito all'interno delle due funzioni di domanda:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{3}\frac{300}{p_1} \\ x_2 = \frac{2}{3}\frac{300}{p_2} \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = \frac{100}{p_1} \\ x_2 = \frac{200}{p_2} \end{cases}$$

Esercizio 2

Risolviamo il sistema senza inserire i valori di p_1, p_2 ed R:

$$\begin{cases} SMS = \frac{p_1}{p_2} \\ R = p_1x_1 + p_2x_2 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{1}{3}\frac{x_2}{x_1} = \frac{p_1}{p_2} \\ R = p_1x_1 + p_2x_2 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 3x_1\frac{p_1}{p_2} \\ R = p_1x_1 + p_2 3x_1\frac{p_1}{p_2} \end{cases} \quad \begin{cases} \rightarrow \\ R = 4p_1x_1 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 3\frac{R}{4p_1}\frac{p_1}{p_2} = \frac{3R}{4p} \\ x_1 = \frac{R}{4p_1} \end{cases}$$

Inseriamo i valori che conosciamo:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{R}{4p_1} \\ x_2 = \frac{3R}{4p} \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = \frac{60}{4\cdot 6} \\ x_2 = \frac{3\cdot 60}{4\cdot 1} \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = \frac{5}{2} = 2,5 \\ x_2 = 3\cdot 15 = 45 \end{cases}$$

Calcoliamo le elasticità dirette delle domande ottime al prezzo:

$$\epsilon(x_1, p_1) = \frac{\partial x_1}{\partial p_1}\frac{p_1}{x_1} = -\frac{R}{p_1^2}\left(\frac{1}{4}\right)\frac{p_1}{x_1} = -\frac{R}{p_1}\left(\frac{1}{4}\right)\frac{1}{\frac{R}{p_1}\left(\frac{1}{4}\right)} = -1$$

$$\epsilon(x_2,\, p_2) = \frac{\partial x_2}{\partial p_2}\frac{p_2}{x_2} = -\frac{R}{p_2^2}\left(\frac{3}{4}\right)\frac{p_2}{x_2} = -\frac{R}{p_2}\left(\frac{3}{4}\right)\frac{1}{\frac{R}{p_2}\left(\frac{3}{4}\right)} = -1$$

Ora invece, calcoliamo le elasticità incrociate delle domande ottime al prezzo:

$$\epsilon(x_1,\, p_2) = \frac{\partial x_1}{\partial p_2}\frac{p_2}{x_1} = 0$$

$$\epsilon(x_2,\, p_1) = \frac{\partial x_2}{\partial p_1}\frac{p_1}{x_2} = 0$$

Calcoliamo le elasticità delle domande ottime al reddito:

$$\epsilon(x_1,\, R) = \frac{\partial x_1}{\partial R}\frac{R}{x_1} = \frac{1}{p_1}\left(\frac{1}{4}\right)\frac{R}{x_1} = \frac{R}{p_1}\left(\frac{1}{4}\right)\frac{1}{\frac{R}{p_1}\left(\frac{1}{4}\right)} = 1$$

$$\epsilon(x_2,\, R) = \frac{\partial x_2}{\partial R}\frac{R}{x_2} = \frac{1}{p_2}\left(\frac{3}{4}\right)\frac{R}{x_2} = \frac{R}{p_2}\left(\frac{3}{4}\right)\frac{1}{\frac{R}{p_2}\left(\frac{3}{4}\right)} = 1$$

Esercizio 3

Calcoliamo il SMS:

$$\frac{\partial U(x_1,x_2)/\partial x_1}{\partial U(x_1,x_2)/\partial x_2} = \frac{0,4x_1^{-0.6}x_2^{0.6}}{0,6x_1^{0.4}x_2^{-0.4}} = \frac{2x_2}{3x_1}$$

Risolviamo il sistema:

$$\begin{cases} SMS = \frac{p_1}{p_2} \\ R = p_1x_1 + p_2x_2 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{2}{3}\frac{x_2}{x_1} = \frac{p_1}{p_2} \\ R = p_1x_1 + p_2x_2 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = \frac{3}{2}x_1\frac{p_1}{p_2} \\ R = p_1x_1 + p_2\frac{3}{2}x_1\frac{p_1}{p_2} \end{cases} \quad \begin{cases} \to \\ R = \frac{5}{2}p_1x_1 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = \frac{3}{2}\frac{2R}{5p}\frac{p_1}{p_2} = \frac{3R}{5p} \\ x_1 = \frac{2R}{5p_1} \end{cases}$$

Inseriamo i dati:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{2R}{5p_1} \\ x_2 = \frac{3R}{5p} \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = \frac{2\cdot 800}{5\cdot 10} = 32 \\ x_2 = \frac{3\cdot 800}{5\cdot 10} = 54 \end{cases}$$

Esercizio 4

Risolviamo il sistema:

$$\begin{cases} SMS = \frac{p_1}{p_2} \\ R = p_1x_1 + p_2x_2 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{x_1}{x_2} = \frac{p_1}{p_2} \\ R = p_1x_1 + p_2x_2 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = \frac{p_1}{p_2}x_1 \\ R = p_1x_1 + p_2\frac{p_1}{p_2}x_1 \to R = 2p_1x_1 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = \frac{R}{2p_1} \\ x_2 = \frac{R}{2p_2} \end{cases}$$

Inseriamo i dati:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{R}{2p_1} = \frac{300}{20} = 15 \\ x_2 = \frac{R}{2p_2} = \frac{300}{10} = 30 \end{cases}$$

La curva di Engel si ottiene ricavando R dalla curva di domanda del bene. In particolare, la curva di Engel per il bene x_1 è:

$$R = 2p_1x_1^* = 20x_1^*$$

la curva di Engel per il bene x_2 è invece:

$$R = 2p_1x_1^* = 10x_2^*$$

Esercizio 5***

Impostiamo il solito sistema, e troviamo i risultati senza inserire i dati:

$$\begin{cases} SMS = \frac{p_1}{p_2} \\ R = p_1x_1 + p_2x_2 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{x_1}{x_2} = \frac{p_1}{p_2} \\ R = p_1x_1 + p_2x_2 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = \frac{p_1}{p_2}x_1 \\ R = p_1x_1 + p_2\frac{p_1}{p_2}x_1 \to R = 2p_1x_1 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = \frac{R}{2p_1} \\ x_2 = \frac{R}{2p_2} \end{cases}$$

Inseriamo ora i dati per ogni tempo:

1. $t = 1$, $R = 200$, $p_1 = 10$, $p_2 = 5$
$$\begin{cases} x_1 = \frac{200}{20} = 10 \\ x_2 = \frac{200}{10} = 20 \end{cases}$$

2. $t = 2$, $R = 200$, $p_1 = 15$, $p_2 = 10$
$$\begin{cases} x_1 = \frac{200}{30} \quad 6,\bar{6} \\ x_2 = \frac{200}{20} \quad 10 \end{cases}$$

3. $t = 1$, $R = 200$, $p_1 = 20$, $p_2 = 20$
$$\begin{cases} x_1 = \frac{200}{40} \quad 5 \\ x_2 = \frac{200}{40} \quad 5 \end{cases}$$

4. $t = 1$, $R = 200$, $p_1 = 25$, $p_2 = 40$
$$\begin{cases} x_1 = \frac{200}{50} \quad 4 \\ x_2 = \frac{200}{40} \quad 5 \end{cases}$$

Esercizi per i più curiosi

Esercizio sull'Effetto Reddito (ER) e sull'Effetto Sostituzione(ES)

Considerate la seguente funzione di utilità

$$U(x_1,\, x_2) = x_1^{\frac{1}{2}}x_2^{\frac{1}{4}}$$

a cui corrisponde $SMS = \frac{2x_2}{x_1}$. Un reddito $R = 12$ e i prezzi $p_1 = 4$ e $p_2 = 1$.

1. Determinate la scelta ottima del consumatore e il livello di utilità ad essa corrispondente.

2. Determinate la scelta ottima, se il prezzo del bene x_1 si riduce a 2.

3. Determinate il paniere che rende l'individuo indifferente rispetto al paniere iniziale trovato al punto 1. dato il nuovo sistema di prezzi.

4. Calcolate l'effetto reddito (ER), l'effetto sostituzione (ES) e la variazione compensativa. Che tipo di bene è x_1?

SOLUZIONE

1. Per calcolare la scelta ottima del consumatore risolviamo il solito sistema:
$$\begin{cases} SMS = \frac{p_1}{p_2} \\ R = p_1x_1 + p_2x_2 \end{cases} \quad \begin{cases} 2\frac{x_2}{x_1} = 4 \\ 12 = 4x_1 + x_2 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 2x_1 \\ 12 = 4x_1 + 2x_1 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1^* = 2 \\ x_2^* = 4 \end{cases}$$

2. Ripetiamo il punto 1. modificando p_1

$$\begin{cases} SMS = \frac{p_1}{p_2} \\ R = p_1 x_1 + p_2 x_2 \end{cases} \quad \begin{cases} 2\frac{x_2}{x_1} = 2 \\ 12 = 2x_1 + x_2 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = x_1 \\ 12 = 2x_1 + x_1 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1^{**} = 4 \\ x_2^{**} = 4 \end{cases}$$

3. Il paniere che rende l'individuo indifferente rispetto al paniere iniziale trovato in 1. dato il nuovo livello dei prezzi, si trova sulla curva di indifferenza corrispondente al livello di utilità iniziale, ma nel punto in cui il SMS è uguale al nuovo rapporto tra i prezzi. Ciò implica che, per trovare tale paniere, occorre mettere a sistema SMS e prezzi relativi, e l'equazione della curva di indifferenza corrispondente al livello di utilità iniziale U_1:

$$U_1(x_1^*, x_2^*) = \sqrt[2]{2}\sqrt[4]{4} = \sqrt[2]{2}\sqrt[4]{2^2} = \sqrt[2]{4} = 2$$

$$\begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{4}} = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} \rightarrow \\ x_1^2 x_2 = 16 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1^{indiff} = \sqrt[3]{16} = 2,52 \\ x_2^{indiff} = \sqrt[3]{16} = 2,52 \end{cases}$$

4. La variazione complessiva del consumo di x_1, a seguito della riduzione del suo prezzo, è data da

$$ET = x_1^{**} - x_1^* = 4\text{-}2 = 2.$$

questa può essere scomposta in effetto sostituzione,

$$ES = x_1^{indiff} - x_1^* = 2,52 - 2 = 0,52$$

ed effetto reddito

$$ER = ET - ES = 2 - 0,52 = 1,48$$

Poichè l'effetto reddito e l'effetto sostituzione hanno lo stesso segno, il bene x_1 è un bene normale. La variazione compensativa indica l'ammontare di denaro necessario per compensare l'individuo dagli effetti della variazione dei prezzi. Essa è data dalla differenza tra il reddito che consente al consumatore di consumare x_1^{indiff} e il reddito iniziale. Per trovarlo, occorre riscrivere l'equazione del vincolo di bilancio con i prezzi nuovi, sostituirvi $\left(x_1^{indiff}\, x_2^{indiff}\right)$ e risolvere rispetto al reddito:

$$R' = 2 \cdot 2,52 + 1 \cdot 2,52 = 7,56$$

da cui la variazione compensativa è data da

$$R' - R = 7,56 - 12 = -4,44$$

Microeconomia
Correzione prova intermedia

Luisa Lorè*

26/04/2018

Correzione esercizio prova intermedia

Un consumatore ha a disposizione un reddito $R = 200$, desidera comprare due beni, il bene x_1 a cui corrisponde un prezzo di mercato $p_1 = 20$ ed il bene x_2 a cui corrisponde un prezzo di mercato $p_2 = 30$, ed ha preferenze caratterizzate dalla seguente curva d'utilità:

$$U(x_1,\, x_2) = 15x_1^{\frac{2}{5}}x_2^{\frac{3}{5}}$$

Calcolare

1. Il paniere ottimo ai prezzi e al reddito presentati nel testo.
2. Le funzioni di domanda per i beni x_1e x_2, <u>spiegando il procedimento con cui si sono ottenute</u>.
3. Il paniere ottimo, supponendo un aumento del reddito del consumatore di 100.
4. L'elasticità rispetto ai prezzi (semplice e incrociata) per il bene x_2,
<u>spiegando il significato economico dei risultati ottenuti</u> *(aiuto: Che tipo di relazione c'è con il prezzo? Che tipo di beni sono?)*.
5. L'elasticità rispetto al reddito per entrambi i beni, <u>spiegando il significato economico dei risultati ottenuti</u> *(aiuto: Che tipo di relazione c'è con il reddito? Che tipo di beni sono?)*.

SOLUZIONE

1. Calcoliamo il paniere ottimo risolvendo il sistema ed inserendo i dati presenti nel testo:

$$\begin{cases} SMS = \frac{p_1}{p_2} \\ R = p_1x_1 + p_2x_2 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{2}{3}\frac{x_2}{x_1} = \frac{p_1}{p_2} \\ R = p_1x_1 + p_2x_2 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = \frac{3}{2}x_1\frac{p_1}{p_2} \\ R = p_1x_1 + p_2\frac{3}{2}x_1\frac{p_1}{p_2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \rightarrow \\ 2R = 2p_1x_1 + 3p_1x_1 \end{cases} \quad \begin{cases} \rightarrow \\ 2R = 5p_1x_1 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = \frac{3}{2}\frac{2R}{5p_1}\frac{p_1}{p_2} = \frac{3R}{5p_2} \\ x_1 = \frac{2R}{5p_1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = \frac{3R}{5p_2} \\ x_1 = \frac{2R}{5p_1} \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = \frac{3\cdot 200}{5\cdot 30} = 4 \\ x_1 = \frac{2\cdot 200}{5\cdot 20} = 4 \end{cases}$$

*Università di Roma Tor Vergata, luisa.lore@alumni.uniroma2.eu

2. Le funzioni di domanda per i beni x_1 e x_2 sono state ottenute nel punto precedente e sono:

$$\begin{cases} x_2 = \frac{3R}{5p_2} \\ x_1 = \frac{2R}{5p_1} \end{cases}$$

Il sistema di equazioni è stato costruito uguagliando la pendenza, o coefficiente angolare, della curva di utilità (il SMS) e la pedenza, o coefficiente angolare, del vincolo di bilancio (il prezzo relativo, quindi il rapporto fra i due prezzi), per quanto riguarda la prima equazione, ed inserendo il vincolo di bilancio come seconda equazione. Questo perchè la curva di domanda è l'insieme dei punti ottimali di consumo che sono dati dai punti di tangenza (ecco perche uguagliamo le pendenze) tra la curva di utilità e il vincolo di bilancio, per qualsiasi livello di utilità, per qualsiasi reddito e per qualsiasi prezzo relativo.
Cosa possiamo aggiungere riguardo le funzioni di domanda trovate?

   (a) In entrambe le funzioni notiamo come il reddito sia direttamente proporzionale, e quindi, all'aumentare del reddito aumenterà anche la quantità di quel bene. Ci aspettiamo quindi un'elasticità positiva.

   (b) In entrambe le funzioni notiamo come il prezzo di quel bene sia inversamente proporzionale, e quindi, all'aumentare del prezzo la quantità di quel bene diminuirà. Ci aspettiamo quindi un'elasticità negativa.

   (c) In entrambe le funzioni notiamo come il prezzo dell'altro bene non figuri, e quindi la quantità di un bene non è sensibile rispetto alle variazioni di prezzo del bene opposto. Ci aspettiamo quindi un'elasticità uguale a 0.

3. Inseriamo nelle funzioni di domanda il nuovo reddito:

$$\begin{cases} x_2 = \frac{3R}{5p_2} \\ x_1 = \frac{2R}{5p_1} \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = \frac{3\cdot 300}{5\cdot 30} = 6 \\ x_1 = \frac{2\cdot 300}{5\cdot 20} = 6 \end{cases}$$

4. Calcoliamo l'elasticità rispetto ai prezzi (semplice e incrociata) per il bene x_2 con le seguenti formule:

$$\varepsilon(x_2, p_2) = \frac{\partial x_2}{\partial p_2}\frac{p_2}{x_2} = -\frac{3R}{5p_2^2}\frac{p_2}{\frac{3R}{5p_2}} = -1$$

$$\varepsilon(x_2, p_1) = 0$$

L'elasticità "semplice" quindi rispetto al proprio prezzo è negativa, questo significa che all'aumentare del suo prezzo diminuisce la quantità del bene desiderata. Possiamo quindi definire il bene x_2 come bene ordinario o normale.
L'elasticità "incrociata" quindi rispetto al prezzo dell'altro bene è uguale a zero, questo significa che qualsiasi cosa succeda al prezzo del bene x_1 la quantità desiderata del bene x_2 non sarà intaccata.

5. Calcoliamo l'elasticità rispetto al Reddito per entrambi i beni con le seguenti formule:

$$\varepsilon(x_1, R) = \frac{\partial x_1}{\partial R}\frac{R}{x_1} = \frac{2}{5p_1}\frac{R}{\frac{2R}{5p_1}} = 1$$

$$\varepsilon(x_2, R) = \frac{\partial x_2}{\partial R}\frac{R}{x_2} = \frac{3}{5p_2}\frac{R}{\frac{3R}{5p_2}} = 1$$

Entrambe le elasticità rispetto al reddito sono positive, questo significa che all'aumentare del reddito aumenta la quantità del bene desiderata. Possiamo quindi definire entrambi i beni come beni superiori o normali.

Microeconomia
Esercitazione 10 - Le scelte dell'imprenditore (1)

Luisa Lorè*

03/05/2018

Esercizio 1 (E4.1, E4.2)

ARGOMENTI

- Funzione di produzione
- Concetto di isoquanto
- Produttività media e marginale dei fattori di produzione
- Saggio Marginale di Sostituzione Tecnica
- Proprietà dell'isoquanto

Data la funzione di produzione

$$Y = f(L, K) = 4L^2K^2$$

1. Individuate l'equazione di un generico isoquanto, spiegando il procedimento con cui lo si è ottenuto.
2. ■ **Esercizio Extra:** Discutete le proprietà dell'isoquanto identificato

SOLUZIONE

Prima di risolvere l'esercizio facciamo chiarezza su due argomenti: cos'è una funzione di produzione, e cos'è un isoquanto (ma anche cosa rappresenta e come si calcola).

La funzione di produzione è l'insieme di punti, il luogo geometrico, che associa qualsiasi combinazione di input disponibile al massimo livello di output ottenibile. Ed è quindi una funzione in cui la quantità prodotta Y dipende dai fattori di produzione, come ad esempio il capitale K e il lavoro L.

$$Y = f(K, L)$$

L'isoquanto è una funzione che rappresenta tutte le combinazioni (K, L) di input che forniscono in maniera output-efficiente un determinato livello di output, $\overline{q}$. L'isoquanto descrive quindi tutte le combinazioni di capitale e lavoro, tutte le tecniche produttive, che permettono di produrre l'output $\overline{q}$ in maniera output-efficiente (tutte le combinazioni che hanno come output efficiente $Y = \overline{q}$).

$$\overline{q} = Y = f(K, L)$$

Sappiamo quindi che l'isoquanto è il luogo geometrico (l'insieme dei punti) in cui la funzione di produzione è massimizzata. E come abbiamo sempre detto finora se vogliamo massimizzare una funzione il metodo più

*Università di Roma Tor Vergata, luisa.lore@alumni.uniroma2.eu

immediato (sempre a patto che ci siano le condizioni necessarie per farlo) è calcolare la derivata prima ed uguagliarla a zero. Quindi sappiamo che lungo l'isoquanto la seguente condizione è verificata:

$$dY = 0 \rightarrow dK \cdot \frac{\partial Y}{\partial K} + dL \cdot \frac{\partial Y}{\partial L} = 0 \rightarrow f^k dK + f^l dL = 0$$

dove $f^k = PmgK$ è la produttività marginale del capitale, mentre $f^l = PmgL$ è la produttività marginale del lavoro. E quindi otteniamo:

$$f^k dK + f^l dL = 0 \rightarrow PmgK \cdot dK + PmgL \cdot dL = 0 \rightarrow \frac{PmgL}{PmgK} = -\frac{dK}{dL}$$

Definiamo infine il Saggio Marginale di Sostituzione Tecnica nel seguente modo:

$$\frac{PmgL}{PmgK} = \left|\frac{dK}{dL}\right| = SMST$$

Sappiamo quindi che sull'isoquanto il $SMST$, che per definizione è il rapporto tra le produttività marginali, è uguale al modulo del rapporto delle derivate totali.

Dopo aver quindi richiamato alla mente questi importanti concetti passiamo ora alla risoluzione dell'esercizio:

1. Per calcolare l'equazione di un generico isoquanto, basta semplicemente riscrivere la funzione di produzione fissando un livello $\overline{q}$ di output, nel seguente modo:

$$\overline{q} = f(K, L) = 4L^2K^2$$

Esercizio 2 (E4.3)

ARGOMENTI

- Funzione di costo totale
- Concetto di isocosto
- Proprietà dell'isocosto

Data la funzione di spesa

$$CT = 20L + 10K$$

1. Individuate l'equazione di un generico isocosto, spiegando il procedimento con cui lo si è ottenuto.
2. Individuate l'equazione degli isocosti corrispondenti ai livelli $\bar{c} = 1$ e $\bar{c} = 5$, e tracciate una rappresentazione grafica.

SOLUZIONE

Di nuovo, prima di cominciare l'esercizio facciamo un rapido ripasso di cosa sono e come vengono espressi la funzione di costo totale dell'impresa e l'isocosto.

La funzione di costo totale dell'impresa rappresenta il costo minimo di produrre una qualsiasi quantità Q. Possiamo facilmente suddividere il costo totale dell'impresa in costi fissi, quei costi che l'imprenditore dovrà sostenere indipendentemente dalla quantità prodotta, che saranno quindi rappresentati matematicamente da una costante, e costi variabili, quei costi che variano a seconda dalla quantità prodotta, che saranno quindi rappresentati matematicamente da una funzione della quantità.

$$CT(Q) = CF + CV(Q)$$

L'isocosto è quel luogo geometrico di combinazioni di tecniche produttive fattore lavoro - fattore capitale tutte caratterizzate da uno stesso costo per l'imprenditore. Nel caso dei due fattori di produzione già introdotti nella funzione di produzione, L e K, definendo le loro remunerazioni rispettivamente w il salario, lo stipendio, dei lavoratori e r il tasso d'interesse del capitale, possiamo scrivere:

$$\bar{c} = CT(L,\, K) = wL + rK \longrightarrow K = -\frac{w}{r}L + \frac{\bar{c}}{r}$$

Dopo aver quindi richiamato alla mente questi importanti concetti passiamo ora alla risoluzione dell'esercizio:

1. Per calcolare l'equazione di un generico isocosto, basta semplicemente riscrivere la funzione di costo totale fissando un livello $\bar{c}$ di costo, nel seguente modo:

$$\bar{c} = 20L + 10K \longrightarrow K = -2L + \frac{\bar{c}}{10}$$

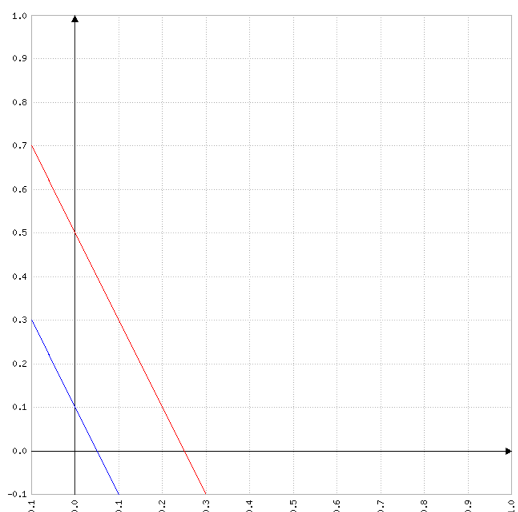
2. Per calcolare l'equazione di isocosti specifici sostituiamo $\bar{c}$ con il valore di costo totale desiderato:

   (a) $\bar{c} = 1$

$$1 = 20L + 10K \longrightarrow K = -2L + \frac{1}{10}$$

   (b) $\bar{c} = 5$

$$5 = 20L + 10K \longrightarrow K = -2L + \frac{1}{2}$$



Esercizio 3 (E4.4)

ARGOMENTI

- Funzione di produzione e funzione di costo totale
- Isoquanto ed isocosto
- Minimizzazione della spesa
- Saggio Marginale di Sostituzione Tecnica

Dato l'isoquanto

$$Y = 100 = f(L, K) = L^{\frac{1}{4}} K^{\frac{3}{4}}$$

per $w = 1$ e $r = 3$ individuate quale combinazione di input consente all'imprenditore di realizzare in modo economicamente efficiente, nel lungo periodo, il livello di produzione individuato.

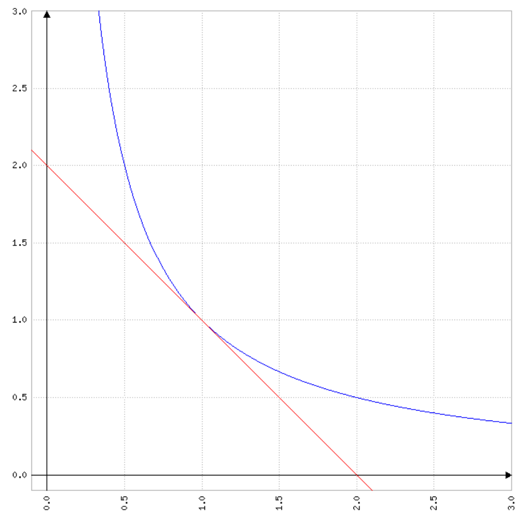
SOLUZIONE
Possiamo ora finalmente passare alla risoluzione del problema di minimizzazione dei costi seguendo un parallelo con la teoria del consumatore e la relativa massimizzazione del profitto, possiamo impostare un problema nel seguente modo:

Massimizzazione dell'Utilità
In questo tipo di problemi dobbiamo massimizzare l'utilità che un consumatore può trarre data la sua funzione di utilità (e quindi il suo SMS) e dati un reddito e i prezzi di mercato dei due beni tra cui il consumatore può scegliere (e quindi il suo vincolo di bilancio e i conseguenti prezzi relativi). Per calcolare il paniere di consumo ottimo dobbiamo calcolare il punto di tangenza tra il vincolo di bilancio e la curva di indifferenza relativa, quello è il punto di massimo.
Per fare ciò costruiamo il seguente sistema:

$$\begin{cases} SMS = \frac{p_1}{p_2} \\ R = p_1 x_1 + p_2 x_2 \end{cases}$$

Minimizzazione della Spesa
In questo tipo di problemi dobbiamo minimizzare la spesa che un imprenditore deve sostenere data la sua funzione di costo totale e le remunerazioni di lavoro e capitale (e quindi il rapporto tra le remunerazioni, la pendenza di tutti gli isocosti) e data la sua tecnologia, la sua funzione di produzione, e un livello di output (e quindi il suo $SMST$ e uno specifico isoquanto). Per calcolare il costo totale ottimo dobbiamo calcolare il punto di tangenza tra l'isoquanto e isocosto, quello è il punto di minimo.
Per fare ciò costruiamo il seguente sistema:

$$\begin{cases} SMST = \frac{w}{r} \\ q = f(K, L) \end{cases}$$



Detto ciò, risolviamo l'esercizio. Calcoliamo prima il $SMST$, in questo modo:

$$SMST = \frac{\partial Y / \partial L}{\partial Y / \partial K} = \frac{PmgL}{PmgK} = \frac{\frac{1}{4} L^{\frac{1}{4}-1} K^{\frac{3}{4}}}{\frac{3}{4} L^{\frac{1}{4}} K^{\frac{3}{4}-1}} = \frac{1}{3} L^{\frac{1}{4}-1-\frac{1}{4}} K^{\frac{3}{4}-\frac{3}{4}+1} = \frac{1}{3}\frac{K}{L}$$

Impostiamo il sistema come spiegato precedentemente:

$$\begin{cases} SMST = \frac{w}{p} \\ \bar{q} = f\left(L,\, K\right) \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{1K}{3L} = \frac{1}{3} \\ 100 = L^{\frac{1}{4}} K^{\frac{3}{4}} \end{cases} \quad \begin{cases} K = L \\ 100 = L^{\frac{1}{4}} L^{\frac{3}{4}} \end{cases} \quad \begin{cases} K = 100 \\ L = 100 \end{cases}$$

Microeconomia
Esercitazione 11 - Le scelte dell'imprenditore (2)

Luisa Lorè[*]

10/05/2018

Esercizio 1

ARGOMENTI

- Produttività marginale
- SMST

Data la seguente funzione di produzione

$$f(K, L) = Y = L^{\frac{1}{4}} K^{\frac{2}{4}}$$

Calcolare:

1. La produttività marginale del lavoro
2. La produttività marginale del capitale
3. Il Saggio Marginale di Sostituzione Tecnica (SMST)

SOLUZIONE

1. $PmgL = \frac{\partial Y}{\partial L} = \frac{1}{4} L^{\frac{1}{4}-1} K^{\frac{2}{4}} = \frac{1}{4} L^{-\frac{3}{4}} K^{\frac{2}{4}}$
2. $PmgK = \frac{\partial Y}{\partial K} = \frac{2}{4} L^{\frac{1}{4}} K^{\frac{2}{4}-1} = \frac{1}{2} L^{\frac{1}{4}} K^{-\frac{2}{4}}$
3. $SMST = \frac{\partial Y/\partial L}{\partial Y/\partial K} = \frac{\frac{1}{4} L^{-\frac{3}{4}} K^{\frac{2}{4}}}{\frac{1}{2} L^{\frac{1}{4}} K^{-\frac{2}{4}}} = \frac{1}{4}\frac{2}{1} L^{-\frac{3}{4}-\frac{1}{4}} K^{\frac{2}{4}+\frac{2}{4}} = \frac{1}{2} L^{-1} K^{1} = \frac{K}{2L}$

[*]Università di Roma Tor Vergata, luisa.lore@alumni.uniroma2.eu

Esercizio 2 (E4.7, E4.8, E4.9)

ARGOMENTI

- Rendimenti di scala

Date le seguenti funzioni di produzione stabilire i relativi rendimenti di scala, dando inoltre una chiara definizione di ogni tipologia di rendimento spiegandone il concetto:

1. $f(K, L) = 2(L + K)$
2. $f(K, L) = L^{\frac{1}{2}} K^{\frac{2}{6}}$
3. $f(K, L) = 2(LK)^{\frac{1}{2}}$
4. $f(K, L) = L + K^2$
5. $f(K, L) = L^3 K^5$

SOLUZIONE

Prima di tutto partiamo dalle definizioni dei rendimenti di scala per affrontare l'esercizio avendo chiaro il concetto di rendimento. Una funzione di produzione ha rendimenti di scala:

Crescenti se all'aumentare dei fattori di produzione, l'output aumenta in maniera più che proporzionale.

Costanti se all'aumentare dei fattori di produzione, l'output aumenta in maniera proporzionale.

Decrescenti se all'aumentare dei fattori di produzione, l'output aumenta in maniera meno che proporzionale.

In generale, per verificare i rendimenti di scala possiamo semplicemente moltiplicare l'intera funzione per una costante λ (dove $\lambda > 0$), e i rendimenti di scala saranno:

Crescenti se $f(\lambda K, \lambda L) > \lambda f(K, L)$ perché aumentando i fattori di produzione di una costante λ l'aumento della quantità prodotta è maggiore rispetto all'aumento della quantità della stessa costante.

Costanti se $f(\lambda K, \lambda L) = \lambda f(K, L)$ perché aumentando i fattori di produzione di una costante λ l'aumento della quantità prodotta è uguale all'aumento della quantità della stessa costante.

Decrescenti se $f(\lambda K, \lambda L) < \lambda f(K, L)$ perché aumentando i fattori di produzione di una costante λ l'aumento della quantità prodotta è minore rispetto all'aumento della quantità della stessa costante.

Se però, abbiamo davanti una funzione cosidetta Cobb-Douglas, possiamo fare affidamento sugli esponenti a cui sono elevati i fattori di produzione. Una funzione Cobb-Douglas è scritta nel seguente modo:

$$f(K, L) = K^\alpha L^\beta$$

Perciò se applichiamo lo stesso ragionamento fatto finora, otteniamo:

$$\begin{gathered} f(\lambda K, \lambda L) \lesseqgtr \lambda [f(K, L)] \\ \lambda^\alpha K^\alpha \lambda^\beta L^\beta \lesseqgtr \lambda K^\alpha L^\beta \\ \lambda^{\alpha+\beta} K^\alpha L^\beta \lesseqgtr \lambda K^\alpha L^\beta \\ \lambda^{\alpha+\beta} \lesseqgtr \lambda \\ \alpha + \beta \lesseqgtr 1 \end{gathered}$$

Quindi, questa funzione avrà rendimenti di scala:

Crescenti se $\alpha + \beta > 1$

Costanti se $\alpha + \beta = 1$

Decrescenti se $\alpha + \beta < 1$

Ora passiamo alla risoluzione dell'esercizio, tramite due differenti strategie da applicare di volta in volta a seconda di come è espressa la nostra funzione.

1. $f(K, L) = 2(L + K)$
   $f(\lambda K, \lambda L) = 2(\lambda L + \lambda K) = 2\lambda(L + K)$
   $\lambda [f(K, L)] = 2\lambda(L + K)$
   $2\lambda(L + K) = 2\lambda(L + K) \rightarrow$ *rendimenti di scala costanti*

2. $f(K, L) = L^{\frac{1}{2}} K^{\frac{2}{6}}$
   $\frac{1}{2} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6} < 1 \rightarrow$ *rendimenti di scala decrescenti*

3. $f(K, L) = 2(LK)^{\frac{1}{2}}$
   $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \rightarrow$ *rendimenti di scala costanti*

4. $f(K, L) = L + K^2$
   $f(\lambda K, \lambda L) = (\lambda L + (\lambda K)^2) = (\lambda L + \lambda^2 K^2) = \lambda(L + \lambda K^2)$
   $\lambda [f(K, L)] = \lambda(L + K^2)$
   $\lambda(L + \lambda K^2) > \lambda(L + K^2) \rightarrow$ *rendimenti di scala crescenti*

5. $f(K, L) = L^3 K^5$
   $3 + 5 = 8 > 1 \rightarrow$ *rendimenti di scala crescenti*

■ Esercizio Extra ***

Data la seguente funzione di produzione:

$$f(K, L) = K^{\frac{1}{4}} L^{\frac{1}{4}}$$

1. Calcolare l'isoquanto corrispondente al livello $q = 200$;
2. Indicare i rendimenti di scala della funzione in due diversi modi;
3. Risolvere il problema della minimizzazione dei costi con la classica formula dei costi totali ($CT = wL + rK$), per l'isoquanto calcolato nel primo punto e per i seguenti dati $w = 16$ e $r = 1$;
4. Ripetere l'esercizio per la seguente funzione di produzione:

$$f(K, L) = K^2 L^2$$

SOLUZIONE

1. $K^{\frac{1}{4}} L^{\frac{1}{4}} = 200$;
2. Rendimenti di scala:
   (a) $f(K, L) = K^{\frac{1}{4}} L^{\frac{1}{4}}$
   $f(\lambda K, \lambda L) = \lambda^{\frac{1}{4}} K^{\frac{1}{4}} \lambda^{\frac{1}{4}} L^{\frac{1}{4}} = \lambda^{\frac{1}{2}} K^{\frac{1}{4}} L^{\frac{1}{4}}$
   $\lambda [f(K, L)] = \lambda K^{\frac{1}{4}} L^{\frac{1}{4}}$
   $\lambda^{\frac{1}{2}} K^{\frac{1}{4}} L^{\frac{1}{4}} < \lambda K^{\frac{1}{4}} L^{\frac{1}{4}} \rightarrow$ *rendimenti di scala decrescenti*

(b) $f\left(K,\,L\right)=L^{\frac{1}{2}}K^{\frac{1}{2}}$
$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}<1\rightarrow rendimenti\,di\,scala\,decrescenti$

3. Risolviamo il problema di minimizzazione:

$$SMST=\frac{\partial Y/\partial L}{\partial Y/\partial K}=\frac{PmgL}{PmgK}=\frac{\frac{1}{4}L^{\frac{1}{4}-1}K^{\frac{1}{4}}}{\frac{1}{4}L^{\frac{1}{4}}K^{\frac{1}{4}-1}}=L^{\frac{1}{4}-1-\frac{1}{4}}K^{\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+1}=\frac{K}{L}$$

$$\begin{cases}SMST=\frac{w}{p}\\ \bar{q}=f\left(L,\,K\right)\end{cases}\quad\begin{cases}\frac{K}{L}=16\\ 200=K^{\frac{1}{4}}L^{\frac{1}{4}}\end{cases}\quad\begin{cases}K=16L\\ 200=\left(16L\right)^{\frac{1}{4}}L^{\frac{1}{4}}\end{cases}\quad\begin{cases}\longrightarrow\\ 200=16^{\frac{1}{4}}L^{\frac{1}{2}}\end{cases}\quad\begin{cases}\longrightarrow\\ L=100^{2}\end{cases}\quad\begin{cases}K=160\,000\\ L=10\,000\end{cases}$$

Ripetere l'esercizio per la nuova funzione di produzione;

1. $K^2L^2=200$;

2. Rendimenti di scala:

   (a) $f\left(K,\,L\right)=K^2L^2$
   $f\left(\lambda K,\,\lambda L\right)=\lambda^2K^2\lambda^2L^2=\lambda^4K^2L^2$
   $\lambda\left[f\left(K,\,L\right)\right]=\lambda K^2L^2$
   $\lambda^4K^2L^2>\lambda K^2L^2\rightarrow rendimenti\,di\,scala\,crescenti$

   (b) $f\left(K,\,L\right)=K^2L^2$
   $2+2=4>1\rightarrow rendimenti\,di\,scala\,crescenti$

3. Risolviamo il problema di minimizzazione:

$$SMST=\frac{\partial Y/\partial L}{\partial Y/\partial K}=\frac{PmgL}{PmgK}=\frac{2LK^2}{2L^2K}=L^{1-2}K^{2-1}=\frac{K}{L}$$

$$\begin{cases}SMST=\frac{w}{p}\\ \bar{q}=f\left(L,\,K\right)\end{cases}\quad\begin{cases}\frac{K}{L}=16\\ 200=K^2L^2\end{cases}\quad\begin{cases}K=16L\\ 200=\left(16L\right)^2L^2\end{cases}\quad\begin{cases}\longrightarrow\\ 200=256\cdot L^4\end{cases}\quad\begin{cases}K=16\left(\frac{200}{256}\right)^{\frac{1}{4}}\\ L=\left(\frac{200}{256}\right)^{\frac{1}{4}}\end{cases}$$

Microeconomia
Esercitazione 12 - Le scelte dell'imprenditore (3)

Luisa Lorè*

17/05/2018

Esercizio 1 (E4.6)

ARGOMENTI

- Costi
- Produttività

Date le seguenti funzioni di produzioni e di costi

$$Y = f(K, L) = K^{\frac{2}{5}} L^{\frac{3}{5}}$$
$$C(Q) = 2Q(Q + 20) + 100 = 2Q^2 + 40Q + 100$$

Calcolare:

1. Costo variabile
2. Costo fisso
3. Costo medio
4. Costo medio variabile
5. Costo medio fisso
6. Costo marginale
7. Produttività media del lavoro
8. Produttività media del capitale
9. Produttività marginale del lavoro
10. Produttività marginale del capitale

*Università di Roma Tor Vergata, luisa.lore@alumni.uniroma2.eu

SOLUZIONE

1. $CV(Q) = 2Q(Q + 20) = 2Q^2 + 40Q$
2. $CF(Q) = 100$
3. $CMe(Q) = \frac{CT(Q)}{Q} = \frac{2Q^2+40Q+100}{Q} = 2Q + 40 + \frac{100}{Q}$
4. $CMeV(Q) = \frac{CV(Q)}{Q} = \frac{2Q^2+40Q}{Q} = 2Q + 40$
5. $CMeF(Q) = \frac{CF(Q)}{Q} = \frac{100}{Q}$
6. $CMa(Q) = \frac{\partial CT(Q)}{\partial Q} = 4Q + 40$
7. $PMeL = \frac{Y}{L} = \frac{K^{\frac{2}{5}}L^{\frac{3}{5}}}{L}$
8. $PMeK = \frac{Y}{K} = \frac{K^{\frac{2}{5}}L^{\frac{3}{5}}}{K}$
9. $PMaL = \frac{\partial Y}{\partial L} = \frac{3}{5}K^{\frac{2}{5}}L^{\frac{3}{5}-1} = \frac{3}{5}\left(\frac{K}{L}\right)^{\frac{2}{5}}$
10. $PMaK = \frac{\partial Y}{\partial K} = \frac{2}{5}K^{\frac{2}{5}-1}L^{\frac{3}{5}} = \frac{2}{5}\left(\frac{L}{K}\right)^{\frac{3}{5}}$

Esercizio 2 (E4.9)

ARGOMENTI

- Rendimenti di scala e costo medio

Date le seguenti funzioni di costo calcolate i rendimenti di scala tramite lo studio dell'andamento del costo medio.

1. $CT(Q) = 5Q$
2. $CT(Q) = 3Q^{\frac{1}{3}}$
3. $CT(Q) = 8Q^4$

SOLUZIONE

Prima di tutto cerchiamo di capire quale collegamento c'è tra i rendimenti di scala e il costo medio: i rendimenti di scala ci indicano come aumenta la produzione all'aumentare dei fattori di produzione. Se capiamo come varia il costo medio di un'impresa capiamo anche cosa succede all'aumentare della sua produzione. Se infatti, un'impresa ha:

Costo medio costante Se il costo medio è costante all'aumentare della produzione la media dei costi per tutte le unità prodotte rimane stabile, questo significa che anche i costi rimangono stabili, perché i fattori di produzione aumentano in maniera proporzionale. $\longrightarrow$Rendimenti di scala costanti

Costo medio cresente Se il costo medio aumenta all'aumentare della produzione la media dei costi per tutte le unità prodotte crese, questo significa che anche i costi aumentano, perché i fattori di produzione aumentano in maniera meno che proporzionale e continuare a produrre costa di meno. $\longrightarrow$Rendimenti di scala decrescenti

Costo medio decrescente Se il costo medio diminuisce all'aumentare della produzione la media dei costi per tutte le unità prodotte decresce, questo significa che anche i costi diminuiscono, perché i fattori di produzione aumentano in maniera più che proporzionale e continuare a produrre costa di più. $\longrightarrow$Rendimenti di scala crescenti

1. $CMe(Q) = \frac{CT(Q)}{Q} = \frac{5Q}{Q} = 5 \longrightarrow \frac{\partial CMe(Q)}{\partial Q} = 0 \longrightarrow$ *Rendimenti di scala costanti*
2. $CMe(Q) = \frac{CT(Q)}{Q} = \frac{3Q^{\frac{1}{3}}}{Q} = 3Q^{\frac{1}{3}-1} = 3Q^{-\frac{2}{3}} \longrightarrow \frac{\partial CMe(Q)}{\partial Q} = -3\frac{2}{3}Q^{-\frac{2}{3}-1} = -2Q^{\frac{5}{3}} < 0 \longrightarrow$ *Rendimenti di scala crescenti*
3. $CMe(Q) = \frac{CT(Q)}{Q} = \frac{8Q^4}{Q} = 8Q^3 \longrightarrow \frac{\partial CMe(Q)}{\partial Q} = 8{\cdot}3Q^{3-1} = 24Q^2 > 0 \longrightarrow$ *Rendimenti di scala decrescenti*

Esercizio 3 (E4.11)

ARGOMENTI

- Massimizzazione del profitto

Data la seguente funzione di produzione e i seguenti dati, calcolare la funzione di domanda di lavoro che risolve il problema di massimizzazione del profitto nel breve periodo.

$$f\,(K,\,L) = L^{\frac{1}{2}}K^{\frac{1}{2}}$$

$$p = 10$$

$$\overline{K} = 100$$

$$w = 5$$

$$r = 5$$

SOLUZIONE

Prima di tutto cerchiamo di capire come impostare un problema di massimizzazione del profitto. Richiamiamo alla mente i problemi di ottimizzazione visti fin ora:

Massimizzazione dell'Utilità $\underset{x_1,\,x_2}{max}\, U(x_1,\,x_2)\; s.v.\; R = p_1x_1 + p_2x_2$

Minimizzazione dei Costi $\underset{K,\,L}{min}\, wL + rK\; s.v.\; q = f\,(L,\,K)$

Dobbiamo quindi ora capire cosa vogliamo ottimizzare e sotto quale vincolo, sappiamo che vogliamo massimizzare il profitto, ma cos'è il profitto? Definiamo il profitto come la differenza tra tutti i guadagni (quindi tutto quello che possiamo produrre per il prezzo a cui lo possiamo vendere) e tutti i costi (tutti i fattori di produzione che utiliziamo per il loro prezzo), nel seguente modo:

$$\pi = pY - (wL + rK) = pY - wL - rK$$

Qual è il vincolo che un produttore potrebbe avere in un problema del genere? Sicuramente riguarda la sua possibilità e capacità di produzione di Y, quindi la sua funzione di produzione $f\,(L,\,K)$. Quindi il nostro problema sarà massimizzare il profitto, sotto il vincolo della funzione di produzione. Questa volta però, non costruiremo un sistema per risolvere il problema, ma sostituiremo direttamente il vincolo all'interno della funzione da massimizzare nel seguente modo:

Massimizzazione del Profitto $\underset{K,\,L}{max}\,\pi = pY - wL - rK\; s.v.\; f\,(L,\,K) \longrightarrow \underset{K,\,L}{max}\,\pi = p\,[f\,(L,\,K)] - wL - rK$

Dobbiamo inoltre caratterizzare questo problema per ottenere una massimizzazione nel breve periodo. Convenzionalmente consideriamo L, il lavoro, un fattore di produzione che può essere facilmente modificato in un'impresa, mentre K, il capitale, un fattore di produzione che difficilmente può essere modificato in un'impresa. Quindi nel breve periodo "fissiamo", teniamo costante, il capitale e ottimizziamo solo in funzione del lavoro, nel seguente modo:

Massimizzazione del Profitto (nel breve periodo) $\underset{L}{max}\, \pi = p\left[f\left(L,\, \overline{K}\right)\right] - wL - r\overline{K}$

Così facendo ciò che otteniamo è una funzione in un'unica variabile L e per ottimizzare questa funzione ci basterà calcolarne la derivata prima, uguagliarla a zero, e risolvere per L^*.

Possiamo quindi passare alla risoluzione dell'esercizio:

$$\underset{L}{max}\, \pi = pY - wL - r\overline{K}\; s.v.\; f\left(L,\, \overline{K}\right) \longrightarrow \underset{L}{max}\, \pi = p\left[f\left(L,\, \overline{K}\right)\right] - wL - r\overline{K}$$

$$\underset{L}{max}\, \pi = 10Y - 5L - 500\; s.v.\; L^{\frac{1}{2}}10 \longrightarrow \underset{L}{max}\, \pi = 100L^{\frac{1}{2}} - 5L - 500$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial L} = 100L^{-\frac{1}{2}} - 5 = 0$$

$$\frac{10}{\sqrt{L}} = 1 \longrightarrow \left(\sqrt{L}\right)^2 = 10^2 \longrightarrow L = 100$$

Possiamo ora completare l'esercizio calcolando, ad esempio, il livello ottimale di output da produrre e il relativo profitto:

$$q^* = f\left(K,\, L\right) = 100^{\frac{1}{2}}100^{\frac{1}{2}} = 100$$

$$\pi = 100L^{\frac{1}{2}} - 5L - 500 = 100 \cdot 10 - 5 \cdot 100 - 500 = 1000 - 1000 = 0$$

Microeconomia
Esercizi Extra (2)

Luisa Lorè*

Esercizi sul capitolo 4 del libro

Esercizio 1

Dimostrare come tramite la definizione geometrica dell'isoquanto si arriva alla seguente definizione del $SMST$:

$$SMST = \left| \frac{dK}{dL} \right| = \frac{PmgL}{PmgK}$$

Esercizio 2

Dimostrare perché l'analisi dei rendimenti di scala dei fattori di produzione di una funzione Cobb Douglas viene fatta valutando la somma degli esponenti.

Esercizio 3

Spiegare tutti i passaggi del problema di minimizzazione dei costi (includendo un grafico a riguardo) e fare un'analogia con il problema di massimizzazione dell'utilità.

Esercizio 4

Data la seguente funzione di produzione

$$f(K, L) = L^{\alpha} K^{1-\alpha}$$

con $0 < \alpha < 1$

1. Scrivere l'isoquanto corrispondente al livello di produzione $q = \overline{q}$
2. Determinare i rendimenti di scala
3. Risolvere il problema di minimizzazione dei costi per l'isoquanto calcolato nel primo punto e i seguenti dati: $w = \overline{w}$ e $r = \overline{r}$

*Università di Roma Tor Vergata, luisa.lore@alumni.uniroma2.eu

Esercizio 5

Data la seguente funzione di produzione

$$f(K,\,L) = K^{0,3}L^{0,7}$$

1. Scrivere l'isoquanto corrispondente al livello di produzione $q = 1000$
2. Determinare i rendimenti di scala.
3. Risolvere il problema di minimizzazione dei costi per l'isoquanto calcolato nel primo punto e i seguenti dati: $w = 70$ e $r = 30$

Esercizio 6

Data la seguente funzione di produzione:

$$f(K,\,L) = K^{\gamma}L^{\varepsilon}$$

Calcolare:

1. Produttività media del lavoro
2. Produttività media del capitale
3. Produttività marginale del lavoro
4. Produttività marginale del capitale
5. Saggio Marginale di Sostituzione Tecnica

Esercizio 7

Data la seguente funzione di produzione:

$$f(K,\,L) = K^{\frac{4}{3}}L^{\frac{1}{3}}$$

Calcolare:

1. Produttività media del lavoro
2. Produttività media del capitale
3. Produttività marginale del lavoro
4. Produttività marginale del capitale
5. Saggio Marginale di Sostituzione Tecnica

Esercizio 8

Data le seguente funzione di costo totale

$$C(Q) = Q^2 + \eta Q + \vartheta$$

Calcolare:

1. Costo variabile
2. Costo fisso
3. Costo medio
4. Costo medio variabile
5. Costo medio fisso
6. Costo marginale

Esercizio 9

Data le seguente funzione di costo totale

$$C(Q) = 3Q^2 + 6$$

Calcolare:

1. Costo variabile
2. Costo fisso
3. Costo medio
4. Costo medio variabile
5. Costo medio fisso
6. Costo marginale

Esercizio 10

Date le seguenti funzioni di produzione calcolare i rendimenti di scala:

1. $f(K, L) = KL$
2. $f(K, L) = K + L$
3. $f(K, L) = \frac{1}{K} + \frac{1}{L}$
4. $f(K, L) = K^2 + L^2$
5. $f(K, L) = K^{0.2}K^{0.3}$
6. $f(K, L) = K^5K^7$

Esercizio 11

Illustrare tutti i passaggi del problema di massimizzazione del profitto nel breve periodo.

Esercizio 12

Data la seguente funzione di produzione e i seguenti dati, calcolare la funzione di domanda di lavoro che risolve il problema di massimizzazione del profitto nel breve periodo.

$$f(K,\, L) = L^{\sigma} K^{\omega}$$

$$p = \overline{p}$$

$$K = \overline{K}$$

$$w = \overline{w}$$

$$r = \overline{r}$$

Esercizio 13

Data la seguente funzione di produzione e i seguenti dati, calcolare la funzione di domanda di lavoro che risolve il problema di massimizzazione del profitto nel breve periodo.

$$f(K,\, L) = L^{\frac{2}{3}} K^{\frac{1}{2}}$$

$$p = 30$$

$$\overline{K} = 100$$

$$w = 20$$

$$r = 10$$

Soluzioni esercizi sul capitolo 4 del libro

Esercizio 1

Partire dalla definizione di isoquanto come funzione che rappresenta tutte le combinazioni $(K,\, L)$ di input che forniscono in maniera output-efficiente un determinato livello di output, $\overline{q}$. L'isoquanto descrive quindi tutte le combinazioni di capitale e lavoro, tutte le tecniche produttive, che permettono di produrre l'output $\overline{q}$ in maniera output-efficiente (tutte le combinazioni che hanno come output efficiente $Y = \overline{q}$).

$$\overline{q} = Y = f\,(K,\, L)$$

L'isoquanto è il luogo geometrico (l'insieme dei punti) in cui la funzione di produzione è massimizzata. Per massimizzare una funzione, si calcola la derivata prima e la si uguaglia a zero. Quindi lungo l'isoquanto la seguente condizione è verificata:

$$dY = 0 \rightarrow dK \cdot \frac{\partial Y}{\partial K} + dL \cdot \frac{\partial Y}{\partial L} = 0 \rightarrow f^k dK + f^l dL = 0$$

dove $f^k = PmgK$ è la produttività marginale del capitale, mentre $f^l = PmgL$ è la produttività marginale del lavoro. E quindi si ottiene:

$$f^k dK + f^l dL = 0 \rightarrow PmgK \cdot dK + PmgL \cdot dL = 0 \rightarrow \frac{PmgL}{PmgK} = -\frac{dK}{dL}$$

Si definisce infine il Saggio Marginale di Sostituzione Tecnica nel seguente modo:

$$\frac{PmgL}{PmgK} = \left|\frac{dK}{dL}\right| = SMST$$

Sull'isoquanto il $SMST$, che per definizione è il rapporto tra le produttività marginali, è uguale al modulo del rapporto delle derivate totali.

Esercizio 2

Definire prima le tre tipologie di rendimenti di scala:

Crescenti se $f(\lambda K, \lambda L) > \lambda f(K, L)$ perché aumentando i fattori di produzione di una costante λ l'aumento della quantità prodotta è maggiore rispetto all'aumento della quantità della stessa costante.

Costanti se $f(\lambda K, \lambda L) = \lambda f(K, L)$ perché aumentando i fattori di produzione di una costante λ l'aumento della quantità prodotta è uguale all'aumento della quantità della stessa costante.

Decrescenti se $f(\lambda K, \lambda L) < \lambda f(K, L)$ perché aumentando i fattori di produzione di una costante λ l'aumento della quantità prodotta è minore rispetto all'aumento della quantità della stessa costante.

Una funzione Cobb Douglas è scritta nel seguente modo:

$$f\,(K,\, L) = K^\alpha L^\beta$$

Per ciò se applichiamo lo stesso ragionamento fatto fin ora, otteniamo:

$$\begin{gathered} f\,(\lambda K,\, \lambda L) \lesseqgtr \lambda\,[f\,(K,\, L)] \\ \lambda^\alpha K^\alpha \lambda^\beta L^\beta \lesseqgtr \lambda K^\alpha L^\beta \\ \lambda^{\alpha+\beta} K^\alpha L^\beta \lesseqgtr \lambda K^\alpha L^\beta \\ \lambda^{\alpha+\beta} \lesseqgtr \lambda \\ \alpha + \beta \lesseqgtr 1 \end{gathered}$$

Quindi, questa funzione avrà rendimenti di scala:

Crescenti se $\alpha + \beta > 1$

Costanti se $\alpha + \beta = 1$

Decrescenti se $\alpha + \beta < 1$

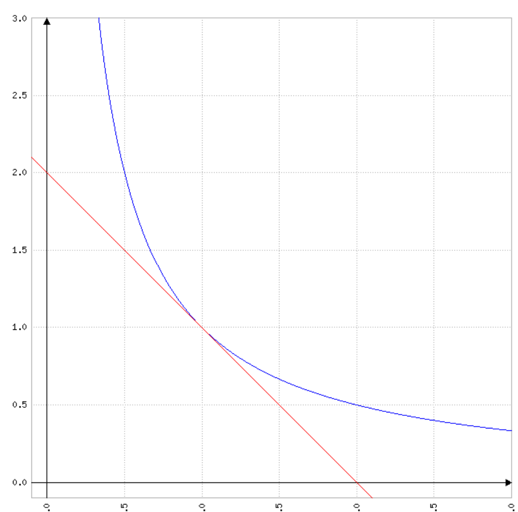
Esercizio 3

Massimizzazione dell'Utilità
In questo tipo di problemi dobbiamo massimizzare l'utilità che un consumatore può trarre data la sua funzione di utilità (e quindi il suo SMS) e dati un reddito e i prezzi di mercato dei due bene tra cui il consumatore può scegliere (e quindi il suo vincolo di bilancio e i conseguenti prezzi relativi). Per calcolare il paniere di consumo ottimo dobbiamo calcolare il punto di tangenza tra il vincolo di bilancio e la curva di indifferenza relativa, quello è il punto di massimo.
Per fare ciò costruiamo il seguente sistema:

$$\begin{cases} SMS = \frac{p_1}{p_2} \\ R = p_1 x_1 + p_2 x_2 \end{cases}$$

Minimizzazione della Spesa
In questo tipo di problemi dobbiamo minimizzare la spesa che un imprenditore deve sostenere data la sua funzione di costo totale e le remunerazioni di lavoro e capitale (e quindi il rapporto tra le remunerazioni, la pendenza di tutti gli isocosti) e data la sua tecnologia, la sua funzione di produzione, e un livello di output (e quindi il suo $SMST$ e uno specifico isoquanto). Per calcolare il costo totale ottimo dobbiamo calcolare il punto di tangenza tra l'isoquanto e isocosto, quello è il punto di minimo.
Per fare ciò costruiamo il seguente sistema:

$$\begin{cases} SMST = \frac{w}{r} \\ q = f(K, L) \end{cases}$$



Esercizio 4

1. $f\,(K,\,L) = L^{\alpha}K^{1-\alpha} = \overline{q}$
2. $\alpha + (1-\alpha) = \alpha + 1 - \alpha = 1 \longrightarrow \textit{rendimenti di scala costanti}$
3.

$$SMST = \frac{\partial Y/\partial L}{\partial Y/\partial K} = \frac{PmgL}{PmgK} = \frac{\alpha L^{\alpha-1}K^{1-\alpha}}{(1-\alpha)L^{\alpha}K^{1-\alpha-1}} = \frac{\alpha}{(1-\alpha)}L^{\alpha-1-\alpha}K^{1-\alpha-1+\alpha+1} = \frac{\alpha}{(1-\alpha)}\frac{K}{L}$$

Impostiamo il sistema come spiegato precedentemente:

$$\begin{cases} SMST = \frac{w}{r} \\ \overline{q} = f\,(L,\,K) \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\alpha}{(1-\alpha)}\frac{K}{L} = \frac{\overline{w}}{\overline{r}} \\ \overline{q} = L^{\alpha}K^{1-\alpha} \end{cases} \quad \begin{cases} K = L\frac{\overline{w}}{\overline{r}}\frac{(1-\alpha)}{\alpha} \\ \overline{q} = L^{\alpha}\left(L\frac{\overline{w}}{\overline{r}}\frac{(1-\alpha)}{\alpha}\right)^{1-\alpha} \end{cases} \quad \begin{cases} \longrightarrow \\ L^{\alpha+1-\alpha}\left(\frac{\overline{w}}{\overline{r}}\frac{(1-\alpha)}{\alpha}\right)^{1-\alpha} = \overline{q} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \longrightarrow \\ L = \frac{\overline{q}}{\left(\frac{\overline{w}}{\overline{r}}\frac{(1-\alpha)}{\alpha}\right)^{1-\alpha}} \end{cases} \quad \begin{cases} K = \frac{\overline{q}}{\left(\frac{\overline{w}}{\overline{r}}\frac{(1-\alpha)}{\alpha}\right)^{1-\alpha}}\left(\frac{\overline{w}}{\overline{r}}\frac{(1-\alpha)}{\alpha}\right) \\ L = \frac{\overline{q}}{\left(\frac{\overline{w}}{\overline{r}}\frac{(1-\alpha)}{\alpha}\right)^{1-\alpha}} \end{cases} \quad \begin{cases} K = \overline{q}\left(\frac{\overline{w}}{\overline{r}}\frac{(1-\alpha)}{\alpha}\right)^{\alpha} \\ L = \overline{q}\left(\frac{\alpha}{(1-\alpha)}\frac{\overline{r}}{\overline{w}}\right)^{1-\alpha} \end{cases}$$

Esercizio 5

1. $f\,(K,\,L) = L^{0,7}K^{0,3} = 1000$
2. $0,7 + 0,3 = 1 \longrightarrow \textit{rendimenti di scala costanti}$
3.

$$SMST = \frac{\partial Y/\partial L}{\partial Y/\partial K} = \frac{PmgL}{PmgK} = \frac{0,7L^{-0,3}K^{0,3}}{0,3L^{0,7}K^{-0,7}} = \frac{7}{3}L^{-0,3-0,7}K^{0,3+0,7} = \frac{7}{3}\frac{K}{L}$$

Impostiamo il sistema come spiegato precedentemente:

$$\begin{cases} SMST = \frac{w}{r} \\ \overline{q} = f\,(L,\,K) \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{7}{3}\frac{K}{L} = \frac{70}{30} \\ L^{0,7}K^{0,3} = 1000 \end{cases} \quad \begin{cases} K = L\frac{70}{30}\frac{3}{7} \to K = L \\ L^{0,7}L^{0,3} = 1000 \end{cases} \quad \begin{cases} K = 1000 \\ L = 1000 \end{cases}$$

Esercizio 6

1. $PMeL = \frac{K^{\gamma}L^{\varepsilon}}{L}$
2. $PMeK = \frac{K^{\gamma}L^{\varepsilon}}{K}$
3. $PMaL = \gamma K^{\gamma-1}L^{\varepsilon}$
4. $PMaK = \varepsilon K^{\gamma}L^{\varepsilon-1}$
5. $SMST = \frac{\gamma}{\varepsilon}\frac{K}{L}$

Esercizio 7

1. $PMeL = \frac{K^{\frac{4}{3}}L^{\frac{1}{3}}}{L}$
2. $PMeK = \frac{K^{\frac{4}{3}}L^{\frac{1}{3}}}{K}$
3. $PMaL = \frac{1}{3}L^{-\frac{2}{3}}K^{\frac{4}{3}}$
4. $PMaK = \frac{4}{3}L^{\frac{1}{3}}K^{\frac{1}{3}}$
5. $SMST = \frac{1}{4}\frac{K}{L}$

Esercizio 8

$$C(Q) = Q^2 + \eta Q + \vartheta$$

1. $CV(Q) = Q^2 + \eta Q$
2. $CF(Q) = \vartheta$
3. $CMe(Q) = Q + \eta + \frac{\vartheta}{Q}$
4. $CMeV(Q) = Q + \eta$
5. $CMeF(Q) = \frac{\vartheta}{Q}$
6. $CMa(Q) = 2Q + \eta$

Esercizio 9

$$C(Q) = 3Q^2 + 6$$

1. $CV(Q) = 3Q^2$
2. $CF(Q) = 6$
3. $CMe(Q) = 3Q + \frac{6}{Q}$
4. $CMeV(Q) = 3Q$
5. $CMeF(Q) = \frac{6}{Q}$
6. $CMa(Q) = 6Q$

Esercizio 10

1. RS Crescenti
2. RS Costanti
3. RS Decrescenti
4. RS Crescenti
5. RS Decrescenti
6. RS Crescenti

Esercizio 11

1. Scrivere il problema di massimizzazione nel seguente modo:

$$\underset{K,\,L}{max}\,\pi = pY - wL - rK\ s.v.\ f\left(L,\,K\right)$$

   Si deve massimizzare il profitto: la differenza tra ricavi totali (prezzo di mercato per la quantità prodotta) e costi totali (espressi tramite il costo dei fattori di produzione per la quantità impiegata).

2. Sostituire la quantità da produrre con la funzione di produzione:

$$\underset{K,\,L}{max}\,\pi = p\left[f\left(L,\,K\right)\right] - wL - rK$$

3. Fissare il fattore di produzione che non possiamo modificare nella produzione, quindi il capitale:

$$\underset{L}{max}\,\pi = p\left[f\left(L,\,\overline{K}\right)\right] - wL - r\overline{K}$$

4. Derivare il profitto rispetto al lavoro, che è l'unica variabile rimasta, ed ugualigliarla a zero e risolvere per L^* per ottere il punto di massimo:

$$\frac{d\pi}{dL} = 0 \Leftrightarrow L = L^*$$

Esercizio 12

$$\underset{L}{max}\,\pi = \overline{p}\left[L^{\sigma}\overline{K}^{\omega}\right] - \overline{w}L - \overline{r}\overline{K}$$

$$\frac{d\pi}{dL} = \sigma\overline{p}K^{\omega}L^{\sigma-1} - \overline{w} = 0 \Leftrightarrow L = \left(\frac{\overline{w}}{\sigma\overline{p}\overline{K}^{\omega}}\right)^{\frac{1}{\sigma-1}}$$

Esercizio 13

$$\underset{L}{max}\,\pi = p\left[L^{\frac{2}{3}}K^{\frac{1}{2}}\right] - wL - r\overline{K}$$

$$\underset{L}{max}\,\pi = 30\left[L^{\frac{2}{3}}100^{\frac{1}{2}}\right] - 20L - 1000 = 300L^{\frac{2}{3}} - 20L - 1000$$

$$\frac{d\pi}{dL} = 200L^{-\frac{1}{3}} - 20 = 0$$

$$\frac{10}{L^{\frac{1}{3}}} = 1 \longrightarrow L^{\frac{1}{3}} = 10 \longrightarrow L = 10^3 \longrightarrow L = 1000$$

Microeconomia
Correzione prova intermedia

Luisa Lorè[*]

24/05/2018

Correzione esercizio prova intermedia

Un imprenditore può produrre secondo la seguente funzione di produzione:

$$Y = f(K,\, L) = K^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}}$$

Calcolare:

1. Il tipo di rendimento di scala che ha la sua funzione di produzione e darne una chiara definizione.
2. Le produttività marginali dei due fattori ed il saggio marginale di sostituzione tecnica.
3. La massimizzazione del profitto π nel breve periodo (nel breve periodo l'imprenditore può ottimizzare solo su un fattore di produzione!), sapendo che la funzione dei costi totali è data da $wL + rK$, il salario dei lavoratori è $w = 4$, il tasso d'interesse è $r = 16$, il capitale che l'imprenditore ha oggi è $K = 100$ ed il prezzo di mercato del bene che vuole produrre è $p = 20$.
4. Il livello di output corrispondente alla massimizzazione del profitto.
5. Il massimo profitto ottenuto a seguito della massimizzazione.

SOLUZIONE

1. Questa funzione ha rendimenti di scala costanti, perchè:
   $\lambda\left[f(K,\, L)\right] = f(\lambda K,\, \lambda L) \longrightarrow \lambda K^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} = (\lambda K)^{\frac{1}{2}} (\lambda L)^{\frac{1}{2}}$
   $\alpha + \beta = 1 \longrightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$
   I rendimenti di scala costante caratterizzano quelle funzioni di produzione in cui all'aumentare degli imput, l'output aumenta in maniera proporzionale.
2. $PMgL = \frac{\partial Y}{\partial L} = \frac{1}{2} K^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{1}{2}}$
   $PMgK = \frac{\partial Y}{\partial K} = \frac{1}{2} K^{-\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}}$
   $SMST = \frac{PMgL}{PMgK} = \frac{\frac{1}{2} K^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2} K^{-\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}}} = \frac{K}{L}$

[*]Università di Roma Tor Vergata, luisa.lore@alumni.uniroma2.eu

3.

$$\pi = pY - wL - r\overline{K}\; s.v.\, Y = f\left(K,\, L\right) = K^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{2}}$$

$$\underset{L}{max}\, \pi = p\left[L^{\frac{1}{2}}\overline{K}^{\frac{1}{2}}\right] - wL - r\overline{K}$$

$$\underset{L}{max}\, \pi = 20\left[L^{\frac{1}{2}}100^{\frac{1}{2}}\right] - 4L - 1600 = 200L^{\frac{1}{2}} - 4L - 1600$$

$$\frac{d\pi}{dL} = 100L^{-\frac{1}{2}} - 4 = 0$$

$$\frac{100}{L^{\frac{1}{2}}} = 4 \longrightarrow L^{\frac{1}{2}} = \frac{100}{4} \longrightarrow L = 25^2 \longrightarrow L = 625$$

4. $q = f\left(K,\, L\right) = K^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{2}} = 100^{\frac{1}{2}}625^{\frac{1}{2}} = 10 \cdot 25 = 250$

5. $\pi = pY - wL - rK = 20 \cdot 250 - 4 \cdot 625 - 16 \cdot 100 = 900$

Microeconomia
Esercitazione 13 - I regimi di mercato (1)

Luisa Lorè*

24/05/2018

Esercizio 1 (E5.1, E5.2)

ARGOMENTI

- Funzione dei costi

Data le seguente funzione di costo totale

$$C(Q) = Q^2 + 4Q + 10$$

Calcolare, per un livello di output $Q = 10$:

1. Costi totali
2. Costo variabile
3. Costo fisso
4. Costo medio
5. Costo medio variabile
6. Costo medio fisso
7. Costo marginale

SOLUZIONE

1. $CT(Q) = Q^2 + 4Q + 10 \longrightarrow CT(10) = 10^2 + 4 \cdot 10 + 10 = 150$
2. $CV(Q) = Q^2 + 4Q \longrightarrow CV(10) = 10^2 + 4 \cdot 10 = 140$
3. $CF(Q) = 10 \longrightarrow CF(10) = 10$
4. $CMe(Q) = Q + 4 + \frac{10}{Q} \longrightarrow CMe(10) = 10 + 4 + \frac{10}{10} = 10 + 4 + 1 = 15$
5. $CMeV(Q) = Q + 4 \longrightarrow CMeV(Q) = 10 + 4 = 14$
6. $CMeF(Q) = \frac{10}{Q} \longrightarrow CMeF(Q) = \frac{10}{10} = 1$
7. $CMa(Q) = 2Q + 4 \longrightarrow CMa(Q) = 2 \cdot 10 + 4 = 24$

*Università di Roma Tor Vergata, luisa.lore@alumni.uniroma2.eu

Esercizio 2 (E5.3, E5.4, E5.5)

ARGOMENTI

- Massimizzazione del profitto nel BP
- Massimizzazione del profitto nel LP

Data la seguente funzione di costo totale

$$C(Q) = Q^2 + 30Q + 300$$

e il prezzo $p = 300$, calcolare:

1. La quantità di output Q che massimizza il profitto π nel breve periodo
2. Il profitto massimo che può raggiungere l'impresa nel breve periodo
3. Il livello di output corrispondente alla condizione di equilibrio nel lungo periodo

SOLUZIONE
Per risolvere questo esercizio, abbiamo bisogno di richiamare alla mente il problema di massimizzazione che abbiamo impostato durante le scorse lezioni:

$$max\, \pi = RT - CT\; s.v.\, Y = f\,(\cdot)$$

Siamo abituati quindi a riscrivere tutto ciò in funzione dei fattori di produzione, nel seguente modo:

$$\underset{K,\,L}{max}\, \pi = pY - wL - rK\; s.v.\; f\,(L,\,K) \longrightarrow \underset{K,\,L}{max}\, \pi = p\,[f\,(L,\,K)] - wL - rK$$

E nel breve periodo a "fissare", tenere costante, uno dei due fattori di produzione, convenzionalmente K e successivamente ottimizzare calcolando la derivata prima, uguagliandola a zero e risolvendo per L. Ma se avessimo a disposizione solo la funzione dei costi in funzione dell'output piuttosto che quella in funzione dei fattori di produzione? Il problema non cambierebbe di molto. Dobbiamo sempre massimizzare il profitto, quindi la differenza tra i ricavi totali e i costi totali rispetto all'unica variable che abbiamo a disposizione, Q. In questo caso inoltre potremmo non avere informazioni sulla funzione di produzione, ma solo sul prezzo di mercato a cui è venduto quetso bene, quindi potremme eseguire una massimizzazione senza vincoli. Impostiamo quindi il nostro problema nel sequente modo:

$$\underset{Q}{max}\, \pi = RT - CT = pQ - CT(Q)$$

Deriviamo la funzione di profitto rispetto all'output ed uguagliamo la sua derivata prima a zero, nel seguente modo:

$$\frac{\partial \pi}{\partial Q} = \frac{\partial (pQ - CT(Q))}{\partial Q} = \frac{\partial (pQ)}{\partial Q} - \frac{\partial CT(Q)}{\partial Q} = p - CMa(Q)$$

$$p - CMa(Q) = 0 \longrightarrow p = CMa(Q)$$

La condizione di profitto ottimale è quindi data dall'uguaglianza tra prezzo e costi marginali. E di conseguenza il profitto nel breve periodo sarà:

$$\pi^{BP} = pQ^{BP} - CT(Q^{BP})$$

Per quanto riguarda il livello di output e il profitto (o la perdita) corrispondenti alla condizione di equilibrio nel lungo periodo, dobbiamo prima definire la condizione di equilibrio. Sappiamo infatti che nel lungo periodo,

$$p = CMe(Q^{min})$$

Il prezzo a cui l'impresa decide di vendere nel lungo periodo risponde a questa condizione, ed è per questo che l'impresa deve far si che la quantità che vuole produrre rispetti questa condizione. E di conseguenza il profitto nel lungo periodo sarà:

$$\pi^{LP} = pQ^{LP} - CT(Q^{LP})$$

Passiamo ora alla risoluzione dell'esercizio:

1. Per calcolare la quantità di output che massimizza il profitto nel breve periodo, uguagliamo il prezzo di mercato ai costi marginali per le ragioni che abbiamo già discusso in precedenza:

$$300 = 2Q + 30 \longrightarrow Q^{BP} = \frac{300-30}{2} = \frac{270}{2} = 135$$

2. Per calcolare il profitto massimo nel breve periodo inseriamo Q^{BP} nella funzione di profitto:

$$\pi^{BP} = 300 \cdot 135 - \left[(135)^2 + 30 \cdot 135 + 300\right] = 40500 - 18225 - 4050 - 300 = 17925$$

3. Il livello di output corrispondente alla condizione di equilibrio nel lungo periodo, minimizziamo il costo medio, e uguagliamo il costo medio calcolato nel punto di minimo al prezzo di mercato come visto precedentemente:

$$CMe(Q) = \frac{Q^2 + 30Q + 300}{Q} = Q + 30 + \frac{300}{Q}$$

$$\frac{\partial CMe(Q)}{\partial Q} = 1 - \frac{300}{Q^2} = 0 \longrightarrow Q^{min} = \sqrt{300} = 17,32 \approx 17$$

$$p^{LP} = CMe(17) = 17 + 30 + \frac{300}{17} \approx 17 + 30 + 18 = 65$$

Microeconomia
Esercitazione 14 - I regimi di mercato (2)

Luisa Lorè*

29/05/2018

Esercizio 1 (E5.6, E5.7, E5.8)

ARGOMENTI

- Competizione perfetta nel breve periodo

In un mercato sotto l'assunzione di concorrenza perfetta operano 10 imprese, ognuna con la seguente funzione di costo totale:

$$CT(Q_i) = Q_i^2$$

La funzione di domanda che caratterizza questo mercato è data dalla seguente funzione:

$$Q^d = 100 - 20p$$

Calcolare:

1. La funzione di offerta di breve periodo della singola impresa
2. La funzione di offerta di breve periodo dell'industria
3. Il prezzo e la quantità di equilibrio del mercato
4. Il livello di produzione ed il profitto realizzato dalla singola impresa nel breve periodo

SOLUZIONE

1. Per calcolare la funzione d'offerta nel breve periodo è necessario calcolare l'equilibrio del breve periodo per una generica impresa i ed esprimere la quantità in funzione del prezzo:

$$p = CMa(Q_i) \longrightarrow p = 2Q_i \longrightarrow Q_i = \frac{1}{2}p$$

2. Per calcolare la funzione d'offerta dell'intera industria, sommiamo linearmente le funzioni d'offerta delle singole imprese, nel seguente modo:

$$Q^s = 10\left(\frac{1}{2}p\right) = 5p$$

*Università di Roma Tor Vergata, luisa.lore@alumni.uniroma2.eu

3. Per calcolare l'equilibrio di mercato dobbiamo risolvere un sistema di due equazioni in due incognite, questo perchè dobbiamo trovare il punto in cui la curva di domanda e la curva d'offerta s'incontrano.

$$\begin{cases} Q^d(p) = 100 - 20p \\ Q^s(p) = 5p \end{cases}$$

Per risolvere un sistema di questo tipo basta uguagliare le due fuzioni (di domanda e d'offerta), poichè esprimono entrambe la quantità in funzione del prezzo

$$100 - 20p = 5p \longrightarrow 25p = 100 \longrightarrow p = \frac{100}{25} = 4$$

Infine sostituiamo il prezzo trovato in una qualsiasi delle due funzioni, ad esempio in quella dell'offerta:

$$Q^s(p) = 5 \cdot 4 = 20$$

La condizione di equilibrio è:

$$Eq. = \{Q^E = 20,\, p^E = 4\}$$

4. Essendoci 10 imprese in perfetta concorrenza ognuna di queste produrrà un decimo della quantità domandata:

$$Q_i^E = \frac{Q^E}{\#\, imprese} = \frac{20}{10} = 2$$

Sostituiamo ora il prezzo in equilibrio e la quantità per ogni impresa all'interno della formula del profitto:

$$\pi_i = p^E \cdot Q_i^E - CT(Q_i^E) = 4 \cdot 2 - 2^2 = 8 - 4 = 4$$

In questo caso le imprese hanno un profitto di 4.

Esercizio 2 (E5.6, E5.7, E5.8)

ARGOMENTI

- Competizione perfetta nel lungo periodo

In un mercato sotto l'assunzione di concorrenza perfetta operano 100 imprese, ognuna con la seguente funzione di costo totale:

$$CT(Q_i) = Q_i^2 + 10$$

La funzione di domanda che caratterizza questo mercato è data dalla seguente funzione:

$$Q^d = 300 - 20p$$

Calcolare:

1. Il prezzo e la quantità di equilibrio dell'impresa nel lungo periodo
2. La quantità di equilibrio del mercato nel lungo periodo per l'industria
3. Il numero di imprese operanti del lungo periodo
4. Il profitto di lungo periodo sostenuto da ciascuna impresa nel caso in cui la dimensione degli impianti non sia libera di variare

SOLUZIONE

1. Per calcolare il prezzo e la quantità, partiamo dalla condizione di equilibrio di un'impresa nel lungo periodo:
$$p = CMe(Q^{min})$$
Perciò minimizziamo la funzione di costi medi,
$$\frac{\partial CMe(Q)}{\partial Q} = \frac{\partial \left(Q + \frac{10}{Q}\right)}{\partial Q} = 1 - \frac{10}{Q^2} = 0 \longrightarrow Q^2 = 10 \longrightarrow Q_i^{LP} = \sqrt{10}$$
Dopo aver trovato il punto minimo per i costi medi inseriamoli nella funzione di partenza e poniamola uguale al prezzo:
$$p = CMe(\sqrt{10}) = \sqrt{10} + \frac{10}{\sqrt{10}} = \sqrt{10} + \sqrt{10} \longrightarrow p^{LP} = 2\sqrt{10}$$

2. Per calcolare invece l'offerta dell'intera industria, moltiplichiamo per 5 la quantità offerta dalla singola impresa:
$$nQ_i = 100\sqrt{10} \approx 316$$

3. Il numero d'imprese operanti è dato dal rapporto fra la funzione di domanda del mercato nel prezzo trovato:
$$Q^d(2\sqrt{10}) = 100 - 20p = 300 - 40\sqrt{10} \approx 300 - 126 = 174 \longrightarrow Q^E \approx 174$$
e la massima quantità che ogni singola impresa è disposta ad offrire nel lungo periodo:
$$n^{LP} = \frac{Q^E}{Q_i} = \frac{174}{\sqrt{10}} \approx 55$$
Possiamo quindi notare che nel lungo periodo, l'offerta eccede la domanda e poco più della metà dell'imprese parteciperà al mercato.

4. Infine, calcoliamo il profitto nel punto di equilibrio per ogni singola impresa:
$$\pi_i = p^E \cdot Q_i^E - CT(Q_i^E) = 2\sqrt{10} \cdot \sqrt{10} - \left(\sqrt{10}\right)^2 - 10 = 20 - 10 - 10 = 0$$
In questo caso le imprese hanno un profitto pari a 0.

Esercizio 3 (E5.9, E5.10, E5.11, E5.12)

ARGOMENTI

- Monopolio

In un mercato in cui opera una sola impresa monopolistica caratterizzata dalla seguente funzione di costo totale:
$$CT(Q) = 100Q$$
la domanda è data da:
$$Q^d = 400 - 2p$$
Calcolare:

1. L'equilibrio che caratterizza il mercato nel caso in cui l'impresa sia price-setter (operi in regime di monopolio)
2. Il mark-up imposto dal monopolista ed il suo profitto
3. L'equilibrio che caratterizza il mercato nel caso in cui l'impresa sia price-taker
4. La perdita netta al monopolio

SOLUZIONE

1. Nel caso in cui un'impresa operi in regime di monopolio, massimizza la seguente funzione:

   $$\underset{Q}{max}\pi^m = RT(Q) - CT(Q) = p(Q)Q - CT(Q) \longrightarrow RMa(Q) - CMa(Q) = 0 \longrightarrow RMa(Q) = CMa(Q)$$

   Dobbiamo quindi calcolare $p(Q)$ la funzione inversa della domanda di mercato, nel seguente modo:

   $$Q^d = 400 - 2p \longrightarrow 2p = 400 - Q \longrightarrow p = 200 - \frac{1}{2}Q$$

   Perciò marginalizziamo costi e ricavi e poniamoli uguali:

   $$\frac{\partial RT(Q)}{\partial Q} = \frac{\partial\left(200Q - \frac{1}{2}Q^2\right)}{\partial Q} = 200 - Q$$

   $$\frac{\partial CT(Q)}{\partial Q} = \frac{\partial\left(100Q\right)}{\partial Q} = 100$$

   $$RMa(Q) = CMa(Q) \longrightarrow 200 - Q = 100 \longrightarrow Q^m = 100$$

   Per trovare il prezzo insieriamo tutto nella funzione di domanda:

   $$p = 200 - \frac{1}{2}Q = 200 - \frac{1}{2}100 \longrightarrow p^m = 150$$

   $$Eq^{mon} = \{Q^m = 100,\, p^m = 150\}$$

2. Per calcolare il mark-up del monopolista sappiamo che:

   $$\mu = \frac{p^m}{CMa(Q^m)} - 1 = \frac{150}{100} - 1 = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2} \longrightarrow 50\%$$

   Mentre il profitto massimo è dato dalla classica formula:

   $$\pi^m = RT(Q^m) - CT(Q^m) = p^m Q^m - CT(Q^m) = 150 \cdot 100 - 100 \cdot 100 = 15000 - 10000 = 5000$$

3. Supponiamo ora che il monopolista per una qualsiasi ragione non possa o rinunci ad influenzare il mercato, sia un'impresa price-taker ed operi quindi secondo le regole della competizione perfetta:

   $$p = CMa(Q) \longrightarrow 200 - \frac{1}{2}Q = 100 \longrightarrow \frac{1}{2}Q = 100 \longrightarrow Q^{cp} = 200$$

   $$p = 200 - \frac{1}{2}200 = 200 - 100 \longrightarrow p^{cp} = 100$$

   $$Eq^{cp} = \{Q^{cp} = 200,\, p^{cp} = 100\}$$

   Come ci aspettavamo, l'equilibrio dell'impresa monopolistica presenta una quantità inferiore ed un prezzo maggiore rispetto a quella price-taker, infatti un monopolio produce meno e vende a prezzi più altri rispetto ad un'impresa che opera in concorrenza perfetta.

4. Calcoliamo ora la differenza tra profitto in monopolio e profitto in competizione perfetta:

   $$\pi^{cp} = RT(Q^{cp}) - CT(Q^{cp}) = p^{cp}Q^{cp} - CT(Q^{cp}) = 100 \cdot 200 - 100 \cdot 200 = 20000 - 20000 = 0$$

Microeconomia
Esercizi Extra (3)

Luisa Lorè*

Esercizi sul capitolo 5 del libro

Esercizio 1

Data la seguente funzione di costo totale

$$CT(Q) = Q^2 + \alpha Q + \beta$$

e il prezzo $p = \gamma$, calcolare:

1. La quantità di output Q che massimizza il profitto π nel breve periodo
2. Il profitto massimo che può raggiungere l'impresa nel breve periodo
3. Il livello di output corrispondente alla condizione di equilibrio nel lungo periodo e il relativo prezzo

Esercizio 2

Data la seguente funzione di costo totale

$$CT(Q) = Q^2 + 10Q + 16$$

e il prezzo $p = 20$, calcolare:

1. La quantità di output Q che massimizza il profitto π nel breve periodo
2. Il profitto massimo che può raggiungere l'impresa nel breve periodo
3. Il livello di output corrispondente alla condizione di equilibrio nel lungo periodo

Esercizio 3

Data la seguente funzione di costo totale

$$CT(Q) = Q^2 + 5Q + 9$$

e il prezzo $p = 15$, calcolare:

1. La quantità di output Q che massimizza il profitto π nel breve periodo
2. Il profitto massimo che può raggiungere l'impresa nel breve periodo
3. Il livello di output corrispondente alla condizione di equilibrio nel lungo periodo

*Università di Roma Tor Vergata, luisa.lore@alumni.uniroma2.eu

Esercizio 4

In un mercato sotto l'assunzione di concorrenza perfetta operano n imprese, ognuna con la seguente funzione di costo totale:

$$CT(Q_i) = Q_i^2 + \alpha Q_i + \beta$$

La funzione di domanda che caratterizza questo mercato è data dalla seguente funzione:

$$Q^d = \eta - \vartheta p$$

Calcolare:

1. La funzione di offerta di breve periodo della singola impresa
2. La funzione di offerta di breve periodo dell'industria
3. Il prezzo e la quantità di equilibrio del mercato
4. Il livello di produzione ed il profitto realizzato dalla singola impresa nel breve periodo

Esercizio 5

In un mercato sotto l'assunzione di concorrenza perfetta operano 10 imprese, ognuna con la seguente funzione di costo totale:

$$CT(Q_i) = Q_i^2 + 5Q_i + 9$$

La funzione di domanda che caratterizza questo mercato è data dalla seguente funzione:

$$Q^d = 35 - p$$

Calcolare:

1. La funzione di offerta di breve periodo della singola impresa
2. La funzione di offerta di breve periodo dell'industria
3. Il prezzo e la quantità di equilibrio del mercato
4. Il livello di produzione ed il profitto realizzato dalla singola impresa nel breve periodo

Esercizio 6

In un mercato sotto l'assunzione di concorrenza perfetta operano 100 imprese, ognuna con la seguente funzione di costo totale:

$$CT(Q_i) = Q_i^2 + 10Q_i + 16$$

La funzione di domanda che caratterizza questo mercato è data dalla seguente funzione:

$$Q^d = 1000 - 50p$$

Calcolare:

1. La funzione di offerta di breve periodo della singola impresa
2. La funzione di offerta di breve periodo dell'industria
3. Il prezzo e la quantità di equilibrio del mercato
4. Il livello di produzione ed il profitto realizzato dalla singola impresa nel breve periodo

Esercizio 7

In un mercato sotto l'assunzione di concorrenza perfetta operano n imprese, ognuna con la seguente funzione di costo totale:

$$C(Q) = Q^2 + \alpha Q + \beta$$

La funzione di domanda che caratterizza questo mercato è data dalla seguente funzione:

$$Q^d = \eta - \vartheta p$$

Calcolare:

1. Il prezzo e la quantità di equilibrio dell'impresa nel lungo periodo
2. La quantità di equilibrio del mercato nel lungo periodo per l'industria
3. La quantità domandata dal mercato nel lungo periodo
4. Il numero di imprese operanti del lungo periodo
5. Il profitto di lungo periodo sostenuto da ciascuna impresa nel caso in cui la dimensione degli impianti non sia libera di variare

Esercizio 8

In un mercato sotto l'assunzione di concorrenza perfetta operano 10 imprese, ognuna con la seguente funzione di costo totale:

$$CT(Q_i) = Q_i^2 + 5Q_i + 9$$

La funzione di domanda che caratterizza questo mercato è data dalla seguente funzione:

$$Q^d = 35 - p$$

Calcolare:

1. Il prezzo e la quantità di equilibrio dell'impresa nel lungo periodo
2. La quantità di equilibrio del mercato nel lungo periodo per l'industria
3. La quantità domandata dal mercato nel lungo periodo
4. Il numero di imprese operanti del lungo periodo
5. Il profitto di lungo periodo sostenuto da ciascuna impresa nel caso in cui la dimensione degli impianti non sia libera di variare

Esercizio 9

In un mercato sotto l'assunzione di concorrenza perfetta operano 100 imprese, ognuna con la seguente funzione di costo totale:

$$CT(Q_i) = Q_i^2 + 10Q_i + 16$$

La funzione di domanda che caratterizza questo mercato è data dalla seguente funzione:

$$Q^d = 1000 - 50p$$

Calcolare:

1. Il prezzo e la quantità di equilibrio dell'impresa nel lungo periodo
2. La quantità di equilibrio del mercato nel lungo periodo per l'industria
3. La quantità domandata dal mercato nel lungo periodo
4. Il numero di imprese operanti del lungo periodo
5. Il profitto di lungo periodo sostenuto da ciascuna impresa nel caso in cui la dimensione degli impianti non sia libera di variare

Esercizio 10

In un mercato in cui opera una sola impresa monopolistica caratterizzata dalla seguente funzione di costo totale:

$$CT(Q) = 1000 + 50Q$$

la domanda è data da:

$$Q^d = 100 - p$$

Calcolare:

1. L'equilibrio che caratterizza il mercato nel caso in cui l'impresa sia price-setter (operi in regime di monopolio)
2. Il mark-up imposto dal monopolista ed il suo profitto
3. L'equilibrio che caratterizza il mercato nel caso in cui l'impresa sia price-taker
4. La perdita netta al monopolio

Esercizio 11

In un mercato in cui opera una sola impresa monopolistica caratterizzata dalla seguente funzione di costo totale:

$$CT(Q) = 200 + 10Q$$

la domanda è data da:

$$Q^d = 100 - p$$

Calcolare:

1. L'equilibrio che caratterizza il mercato nel caso in cui l'impresa sia price-setter (operi in regime di monopolio)
2. Il mark-up imposto dal monopolista ed il suo profitto
3. L'equilibrio che caratterizza il mercato nel caso in cui l'impresa sia price-taker
4. La perdita netta al monopolio

Esercizio 12

In un mercato in cui opera una sola impresa monopolistica caratterizzata dalla seguente funzione di costo totale:

$$CT(Q) = 100 + 8Q$$

la domanda è data da:

$$Q^d = 100 - p$$

Calcolare:

1. L'equilibrio che caratterizza il mercato nel caso in cui l'impresa sia price-setter (operi in regime di monopolio)
2. Il mark-up imposto dal monopolista ed il suo profitto
3. L'equilibrio che caratterizza il mercato nel caso in cui l'impresa sia price-taker
4. La perdita netta al monopolio

Soluzioni esercizi sul capitolo 5 del libro

Esercizio 1

1. $Q^{BP} = \frac{\gamma-\alpha}{2}$
2. $\pi^{BP} = \gamma\frac{\gamma-\alpha}{2} - \left[\left(\frac{\gamma-\alpha}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma-\alpha}{2}\right)\alpha + \beta\right] = \left(\frac{\gamma-\alpha}{2}\right)^2 - \beta$
3. $Q^{LP} = \sqrt{\beta}$
   $p^{LP} = \alpha + 2\sqrt{\beta}$

Esercizio 2

1. $Q^{BP} = 5$
2. $\pi^{BP} = 9$
3. $Q^{LP} = 4$
   $p^{LP} = 18$

Esercizio 3

1. $Q^{BP} = 5$
2. $\pi^{BP} = 16$
3. $Q^{LP} = 3$
   $p^{LP} = 11$

Esercizio 4

1. $Q_i = \frac{p-\alpha}{2}$
2. $Q^s = n\left(\frac{p-\alpha}{2}\right)$
3. $Eq. = \{Q^E = \eta - \vartheta\left(\frac{2\eta+\alpha}{2\vartheta+1}\right), \, p^E = \frac{2\eta+\alpha}{2\vartheta+1}\}$
4. $Q_i^E = \frac{\left[\eta-\vartheta\left(\frac{2\eta+\alpha}{2\vartheta+1}\right)\right]}{n}$
   $\pi_i = \frac{2\eta+\alpha}{2\vartheta+1}\frac{\left[\eta-\vartheta\left(\frac{2\eta+\alpha}{2\vartheta+1}\right)\right]}{n} - \left\{\frac{\left[\eta-\vartheta\left(\frac{2\eta+\alpha}{2\vartheta+1}\right)\right]^2}{n^2} + \frac{\left[\eta-\vartheta\left(\frac{2\eta+\alpha}{2\vartheta+1}\right)\right]}{n}\alpha + \beta\right\}$

Esercizio 5

1. $Q_i = \frac{p-5}{2}$
2. $Q^s = 5p - 25$
3. $Eq. = \{Q^E = 25, \, p^E = 10\}$
4. $Q_i^E = 2,5$
   $\pi_i = -2,75$

Esercizio 6

1. $Q_i = \frac{1}{2}p - 5$
2. $Q^s = 50p - 500$
3. $Eq. = \{Q^E = 250,\, p^E = 15\}$
4. $Q_i^E = 2,5$
   $\pi_i = -9,75$

Esercizio 7

1. $Q^{LP} = \sqrt{\beta}$
   $p^{LP} = \alpha + 2\sqrt{\beta}$
2. $Q^s = n(\alpha + 2\sqrt{\beta})$
3. $Q^E = \eta - \vartheta(\alpha + 2\sqrt{\beta})$
4. $n^{LP} = \frac{\eta - \vartheta(\alpha + 2\sqrt{\beta})}{\sqrt{\beta}}$
5. $\pi_i = \sqrt{\beta}\left(\alpha + 2\sqrt{\beta}\right) - \beta - \alpha\sqrt{\beta} - \sqrt{\beta} = 0$

Esercizio 8

1. $Q^{LP} = 3$
   $p^{LP} = 11$
2. $Q^s = 30$
3. $Q^E = 24$
4. $n^{LP} = 8$
5. $\pi_i = 0$

Esercizio 9

1. $Q^{LP} = 4$
   $p^{LP} = 18$
2. $Q^s = 400$
3. $Q^E = 100$
4. $n^{LP} = 25$
5. $\pi_i = -120$

Esercizio 10

1. $Eq^{mon} = \{Q^m = 25,\ p^m = 75\}$
2. $\mu = 0,5$
   $\pi^m = -375$
3. $Eq.^{cp} = \{Q^{cp} = 50,\ p^{cp} = 50\}$
4. 625

Esercizio 11

1. $Eq^{mon} = \{Q^m = 45,\ p^m = 55\}$
2. $\mu = 4,5$
   $\pi^m = 1825$
3. $Eq^{cp} = \{Q^{cp} = 90,\ p^{cp} = 10\}$
4. 1625

Esercizio 12

1. $Eq^{mon} = \{Q^m = 20,\ p^m = 80\}$
2. $\mu = 9$
   $\pi^m = 1340$
3. $Eq^{cp} = \{Q^{cp} = 92,\ p^{cp} = 8\}$
4. 1440

Microeconomia
Correzione prova intermedia

Luisa Lorè*

Correzione esercizio prova intermedia

Un mercato è caratterizzato dalla seguente funzione di domanda:

$$Q^d = 400 - 3p$$

Un'impresa produce sostenendo i seguenti costi totali:

$$CT(Q_i) = Q_i^2 + 50$$

Calcolare:

1. Supponendo che l'impresa operi in concorrenza perfetta in un mercato in cui ci sono 10 imprese identiche
   (a) La funzione d'offerta dell'intera industria
   (b) L'equilibrio di mercato nel breve periodo $\left(Eq.^{CP}\left\{Q^E; p^E\right\}\right)$
   (c) Profitto realizzato dalla singola impresa nel breve periodo
2. Supponendo che l'impresa operi in monopolio in un mercato in cui è l'unica impresa presente
   (a) L'equilibrio dell'impresa nel breve periodo
   (b) La perdita di profitto in concorrenza perfetta al netto di quello in monopolio

SOLUZIONE

1. Competizione perfetta:
   (a) Impostare l'equazione dell'equilibrio di un'impresa nel breve periodo:

$$p = CMa(Q_i)$$

$$p = 2Q_i$$

$$Q_i^s = \frac{1}{2}p$$

*Università di Roma Tor Vergata, luisa.lore@alumni.uniroma2.eu

(b) Calcolare la funzione d'offerta dell'intera industria:

$$Q^s = 10\frac{1}{2}p = 5p$$

Uguagliarla alla funzione di domanda per trovare il prezzo:

$$Q^s = Q^d$$

$$5p = 400 - 3p \longrightarrow 8p = 400$$
$$p^E = 50$$
$$Q^E = 5 \cdot 50 = 250$$
$$Eq.^{CP}\left\{Q^E = 250;\, p^E = 50\right\}$$

(c) Calcolare la quantità prodotta da una singola impresa:

$$Q_i^s = \frac{Q^s}{n} = \frac{250}{10} = 25$$

Sostituire prezzo e quantità trovati nel punto precedente all'interno della funzione di profitto:

$$\pi^{BP} = p^E \cdot Q_i^s - CT(Q_i^s)$$

$$\pi^{BP} = 50 \cdot 25 - 25^2 - 50 = 1250 - 625 - 50 = 575$$

2. Monopolio:

(a) Impostare l'equazione dell'equilibrio del monopolio:

$$RMa(Q) = CMa(Q)$$

$$RT(Q) = pQ = (\frac{400 - Q}{3})Q \longrightarrow RMa(Q) = \frac{\partial RT(Q)}{\partial Q} = \frac{400}{3} - \frac{2}{3}Q$$

$$CMa(Q) = \frac{\partial CT(Q)}{\partial Q} = 2Q$$

$$\frac{400}{3} - \frac{2}{3}Q = 2Q \longrightarrow \frac{8}{3}Q = \frac{400}{3} \longrightarrow Q = \frac{400}{3}\frac{3}{8}$$
$$Q^m = 50$$
$$p = \frac{400}{3} - \frac{2}{3}Q^{mon} \longrightarrow p = \frac{400}{3} - \frac{1}{3}50 = \frac{400 - 50}{3}$$
$$p^{mon} \approx 117$$
$$Eq.^{mon}\{Q^{mon} = 50;\, p^{mon} \approx 117\}$$

(b) La perdita di profitto in concorrenza perfetta al netto di quello in monopolio

$$\pi^{mon} = p^{mon} \cdot Q^{mon} - CT(Q^{mon})$$

$$\pi^{mon} = 117 \cdot 50 - 50^2 - 50 = 3300$$

$$\pi^{pc} - \pi^{mon} = 575 - 3300 = -2725$$

Microeconomia
Ripasso

Luisa Lorè[*]

Di seguito una lista di alcuni (**non tutti!**) esercizi svolti in classe con i relativi metodi di risoluzione utilizzati.

Teoria del consumatore: La massimizzazione dell'utilità

ARGOMENTI

- Curva d'Utilità e curve d'indifferenza
- Utilità marginale e SMS
- Vincolo di bilancio

COSA MI CHIEDE L'ESERCIZIO?

1. Calcolare la domanda del consumatore per due beni, data la sua funzione d'utilità e il suo vincolo di bilancio.
2. Calcolare il paniere ottimo del consumatore per due beni, data la sua funzione d'utilità e il suo vincolo di bilancio.

COSA DEVO FARE?

1. Impostare il classico sistema di risoluzione:

$$\begin{cases} SMS = \frac{p_1}{p_2} \\ R = p_1 x_1 + p_2 x_2 \end{cases}$$

   Senza sostituire p_1, p_2 e R, ma lasciando i risultati x_1 e x_2 in funzione di questi.

2. Impostare il classico sistema di risoluzione (vedi sopra) e risolverlo matematicamente, i punti risultanti sono le coordinate del paniere ottimo.

RIPASSARE LA SPIEGAZIONE DELL'ESERCITAZIONE 5

[*]Università di Roma Tor Vergata, luisa.lore@alumni.uniroma2.eu

Teoria del produttore: La minimizzazione dei costi

ARGOMENTI

- Funzione di produzione e isoquanto
- Produttività marginale e SMST
- Funzione dei costi e isocosto

COSA MI CHIEDE L'ESERCIZIO?

1. Calcolare la scelta ottima dei fattori di produzione per minimizzare i costi per ogni livello di output.
2. Calcolare la quantità ottimale dei fattori di produzione per minimizzare i costi per un determinato livello di output.
3. Calcolare l'isocosto corrispondente alla minimizzazione dei costi.

COSA DEVO FARE?

1. Impostare il classico sistema di risoluzione:

$$\begin{cases} SMST = \frac{w}{p} \\ \bar{q} = f\left(L, K\right) \end{cases}$$

   Per un generico isoquanto, lasciando i risultati L e K in funzione di questo.

2. Impostare il classico sistema di risoluzione (vedi sopra) e risolverlo matematicamente, i punti risultanti sono le quantità ottimali dei fattori di produzione.
3. Sostituire le quantità ottimali dei fattori di produzione nella funzione di costo totale.

RIPASSARE LA SPIEGAZIONE DELL'ESERCITAZIONE 10

Teoria del produttore: La massimizzazione del profitto nel breve periodo (rispetto ai fattori di produzione)

ARGOMENTI

- Concetto di breve periodo
- Profitto come differenza tra ricavi totali e costi totali

COSA MI CHIEDE L'ESERCIZIO?

1. Massimizzare il profitto nel breve periodo
2. Calcolare la quantità di output corrispondente alla massimizzazione del profitto.
3. Calcolare il profitto corrispondente alla massimizzazione del profitto.

COSA DEVO FARE?

1. Impostare il problema di massimizzazione del profitto, svincolandolo dalla funzione di produzione e tenendo costante uno dei due fattori (convenzionalmente K):

$$\underset{K,\,L}{max}\,\pi = pY - wL - rK\ s.v.\ f\,(L,\,K)$$

$$\underset{K,\,L}{max}\,\pi = p\,[f\,(L,\,K)] - wL - rK$$

$$\underset{L}{max}\,\pi = p\left[f\,(L,\,\overline{K})\right] - wL - r\overline{K}$$

   Calcolare la derivata prima della funzione di profitto (che ora è in un'unica variabile) ed uguagliarla a zero (**N.B.!** Il risultato è il valore ottimale del lavoro L, non la quantità ottimale, né tantomeno il profitto massimo!).

2. Sostituire il livello di L ottimale all'interno della funzione di produzione (**N.B.!** Il valore di K è noto!).
3. Sostituire il livello di L ottimale all'interno della funzione di profitto (**N.B.!** Il valore di K è noto!).

RIPASSARE LA SPIEGAZIONE DELL'ESERCITAZIONE 12

Il mercato: La massimizzazione del profitto nel breve periodo (rispetto alla quantità)

ARGOMENTI

- Profitto come differenza tra ricavi totali e costi totali
- Funzione d'offerta

COSA MI CHIEDE L'ESERCIZIO?

1. Calcolare la quantità di output che massimizza il profitto nel breve periodo.
2. Calcolare il prezzo corrispondente alla massimizzazione del profitto.
3. Calcolare il profitto massimo che può raggiungere l'impresa nel breve periodo.

COSA DEVO FARE?

1. Risolvere la seguente equazione ricavando Q in funzione di p, cosa che può essere fatta sia in forma generica se non si è a conoscenza del prezzo, sia risolvendo l'equazione in forma numerica.

$$p = CMa(Q)$$

2. Risolvere la funzione della domanda (in cui p è in funzione di Q) con il livello di output che si è ricavato dalla funzione precedente.
3. Sostituire i livello di p e Q ottimali all'interno della funzione di profitto:

$$\pi = RT(Q) - CT(Q) = pQ - CT(Q)$$

RIPASSARE LA SPIEGAZIONE DELL'ESERCITAZIONE 13

Il mercato: La massimizzazione del profitto nel lungo periodo (rispetto alla quantità)

ARGOMENTI

- Profitto come differenza tra ricavi totali e costi totali
- Funzione d'offerta

COSA MI CHIEDE L'ESERCIZIO?

1. Calcolare la quantità di output che massimizza il profitto nel lungo periodo.
2. Calcolare il profitto massimo che può raggiungere l'impresa nel lungo periodo.

COSA DEVO FARE?

1. Minimizzare il costo medio
$$\frac{\partial CMe(Q)}{\partial Q} = 0 \longrightarrow Q^{min} = Q^{LP}$$
e risolvere la seguente equazione:
$$p = CMe(Q^{LP})$$
2. Calcolare il profitto in funzione di Q^{LP} e p^{LP}
$$\pi = RT(Q^{LP}) - CT(Q^{LP}) = p^{LP} \cdot Q^{LP} - CT(Q^{LP})$$

RIPASSARE LA SPIEGAZIONE DELL'ESERCITAZIONE 13

Il mercato: La competizione perfetta nel breve periodo

ARGOMENTI

- Competizione perfetta

COSA MI CHIEDE L'ESERCIZIO?

1. Calcolare la funzione di offerta di breve periodo della singola impresa
2. Calcolare la funzione di offerta di breve periodo dell'industria
3. Calcolare il prezzo e la quantità di equilibrio del mercato
4. Calcolare il livello di produzione realizzato dalla singola impresa nel breve periodo
5. Calcolare il profitto realizzato dalla singola impresa nel breve periodo

COSA DEVO FARE?

1. La funzione d'offerta per una singola impresa, Q_i è espessa dalla condizione d'equilibrio:
$$p = CMa(Q)$$
2. Sommare linearmente tutte le funzioni d'offerta presenti nel mercato (moltiplicare per n la funzione d'offerta di una singola impresa Q_i):
$$Q^s = nQ_i$$
3. Calcolare il punto d'intersezione tra curva d'offerta e curva di domanda tramite il sistema:
$$\begin{cases} Q^d(p) \\ Q^s(p) \end{cases} \quad \begin{cases} Q^E \\ p^E \end{cases}$$
$$Eq. = \{Q^E, p^E\}$$
4. Dividere la quantità caratterizzante l'equilibrio per il numero di imprese presenti nell'industria:
$$Q_i^E = \frac{Q^E}{n}$$
5. Calcolare il profitto in funzione di Q_i^E e p^E
$$\pi_i = RT(Q_i^E) - CT(Q_i^E) = p^E \cdot Q_i^E - CT(Q_i^E)$$

RIPASSARE LA SPIEGAZIONE DELL'ESERCITAZIONE 14

Il mercato: La competizione perfetta nel lungo periodo

ARGOMENTI

- Competizione perfetta

COSA MI CHIEDE L'ESERCIZIO?

1. Calcolare il prezzo e la quantità di equilibrio del mercato nel lungo periodo per l'impresa
2. Calcolare il prezzo e la quantità di equilibrio del mercato nel lungo periodo per l'industria
3. Calcolare il numero di imprese operanti del lungo periodo
4. Calcolare il profitto di lungo periodo sostenuto da ciascuna impresa nel caso in cui la dimensione degli impianti non sia libera di variare

COSA DEVO FARE?

1. Minimizzare la funzione di costi medi,

$$\frac{\partial CMe(Q)}{\partial Q} = 0 \longrightarrow Q_i^{LP}$$

   Risolvere la condizione di equilibrio del lungo periodo Dopo aver trovato il punto minimo per i costi medi inseriamoli nella funzione di partenza e poniamola uguale al prezzo:

$$p = CMe(Q_i^{LP}) \longrightarrow p^{LP}$$

2. Sommare linearmente la quantità offerta da ciascuna delle imprese presenti nel mercato (moltiplicare per n la quantità Q_i di una singola impresa):

$$Q^s = nQ_i^{LP}$$

3. Dividere la quantità caratterizzante l'equilibrio (che va calcolato tramite la funzione di domanda) per la quantità offerta da ogni singola impresa:

$$n^{LP} = \frac{Q^E}{Q_i^{LP}}$$

4. Calcolare il profitto in funzione di Q_i e p^E

$$\pi_i = p^{LP} \cdot Q_i^{LP} - CT(Q_i^{LP})$$

RIPASSARE LA SPIEGAZIONE DELL'ESERCITAZIONE 14

Il mercato: Il monopolio

ARGOMENTI

- Monopolio

COSA MI CHIEDE L'ESERCIZIO?

1. Calcolare l'equilibrio dell'impresa monopolistica (impresa price-setter)
2. Calcolare il profitto dell'impresa monopolistica
3. Calcolare il mark-up imposto dal monopolista
4. Calcolare l'equilibrio dell'impresa in competizione perfetta (impresa price-taker)
5. Calcolare la perdita netta al monopolio

COSA DEVO FARE?

1. Risolvere la seguente equazione, per trovare Q^m:

   $$RMa(Q) = CMa(Q)$$

   E sostituire Q^m in $p(Q)$ per trovare p^m.

   $$Eq^{mon} = \{Q^m, p^m\}$$

2. Calcolare la classica formula del profitto nei valori di p e Q trovati

   $$\pi^m = RT(Q^m) - CT(Q^m) = p^m Q^m - CT(Q^m)$$

3. Calcolare il mark-up secondo la seguente formula:

   $$\mu = \frac{p^m}{CMa(Q^m)} - 1$$

4. Risolvere l'equilibrio di breve periodo per le imprese in competizione perfetta:

   $$p = CMa(Q)$$

5. Calcolare il profitto in competizione perfetta:

   $$\pi^{cp} = RT(Q^{cp}) - CT(Q^{cp}) = p^{cp} Q^{cp} - CT(Q^{cp})$$

   e fare la differenza tra i due profitti:

   $$\pi^m - \pi^{cp}$$

RIPASSARE LA SPIEGAZIONE DELL'ESERCITAZIONE 14